VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Dovilė Deltuvienė

ASIMPTOTINIAI SKLEIDINIAI DIDŽIŲJŲ NUOKRYPIŲ ZONOSE

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, matematika - 01P

Vilnius, 2004

Disertacija rengta 1999-2003 metais Vilniaus Gedimino Technikos Universitete.

Disertacija ginama eksternu

Darbo mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Leonas SAULIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas,

fiziniai mokslai, matematika, 01P);

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Dovilė Deltuvienė

ASYMPTOTIC EXPANSION

IN THE LARGE DEVIATION ZONES

Doctoral Dissertation

Physical Sciences, Mathematics - 01P

Vilnius, 2004

The study was performed in 1999 - 2003 at the Vilnius Gediminas Technical University.

The doctoral disertation is defended as an external work.

Doctoral Scientific Supervisor:

Prof. Dr. Habil. Leonas SAULIS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics, 01P);

Turinys

Įvadas

Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos ribinių teoremų didžiųjų nuokrypių problematikoje didelė darbų dalis tenka nepriklausomų ir priklausomų atsitiktinių dydžių sumų $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ skirstinių asimptotinei analizei. Čia itin svarbią vietą užima *eksponentinių momentų* egzistavimo sąlyga: egzistuoja dydžiai $a > 0$ ir $\gamma \geq 0$, tokie, kad $\mathbf{E}\exp\left\{a|X_j|^{\frac{1}{1+\gamma}}\right\} < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Tuo atveju, kai $\gamma = 0$, tai sakoma, kad atsitiktinis dydis X_j tenkina *Kramerio sąlygą*.Atsitiktinio dydžio X_j charakteristinė funkcija $f_{X_j}(t) = \mathbf{E}\exp\{itX_j\}$ yra analizinė taško $t = 0$ aplinkoje. Kai atsitiktiniai dydžiai X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ tenkina minėtą sąlygą su $\gamma > 0$, tai sakoma, kad jie tenkina *Liniko sąlygą*. Šiuo atveju, egzistuoja atsitiktinio dydžio X_j visų eilių momentai, bet jų augimas neužtikrina charakteristinės funkcijos $f_{X_j}(t)$ analiziškumo nulinio taško aplinkoje.

Nemažindami bendrumo, tarsime, kad atsitiktinio dydžio S_n vidurkis $\mathbf{E}S_n = 0$, o dispersija $B_n^2 = \mathbf{D}S_n$. Didžiųjų nuokrypių teoremose nagrinėjamas santykio

$$D_n(x) := \frac{\mathbf{P}(S_n \geq B_n x)}{(1 - \Phi(x))\exp\{\lambda_n(x)\}} \qquad (1)$$

asimptotinis elgesys (artėjimas į 1), konvergavimo greitis ir asimptotinis skleidinys, kai $x = \Lambda(n) \to \infty$, $n \to \infty$. Čia $\lambda_n(x)$ yra Kramerio - Petrovo konverguojanti eilutė, kai $\gamma = 0$, su koeficientais, išreiškiamais per atsitiktinio dydžio $Z_n = S_n/B_n$ kumulantus ir polinomas, kai

$\gamma > 0$. Atsitiktinio dydžio X, $k - tosios$ eilės kumuliantas $\Gamma_k(X)$ apibrėžiamas lygybe

$$\Gamma_k(X) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \ln f_X(t) \bigg|_{t=0}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

$\Phi(x)$ − standartinis normalusis skirstinys $N(0, 1)$.

Santykio $D_n(x)$, apibrėžto lygybe (1), analizėje svarbią vietą užima H.Cramer (1938) darbas. Kai sumos $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ dėmenys yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, optimaliausią rezultatą gavo V. Petrovas (1972). Šie rezultatai ir plati jų literatūros apžvalga pateikti V. Petrovo monografijoje [44]. Didžiųjų nuokrypių santykio $D_n(x)$ asimptotinė analizė yra daug sudėtingesnė, kai sumos S_n atskiri dėmenys X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir tenkina Liniko sąlygą $\mathbf{E} \exp\left\{a|X_j|\right\}^{\frac{1}{1+\gamma}} < \infty$, $\gamma > 0$. Santykio $D_n(x)$ asimptotika (artėjimas į vienetą) ir konvergavimo greitis laipsninėse Liniko zonose pilnai ištirtas I.A.Ibragimov, Yu.V.Linnik monografijoje (1965) ir S.V.Nagajev apžvalginiame straipsnyje (1979). Šiuose ir kituose darbuose didžiųjų nuokrypių teoremos gautos ganėtinai sudėtingu *analiziniu balno taško metodu* paprastai *nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms*. Tai yra paprasčiausias atvejis, leidžiantis suprasti didžiųjų nuokrypių tikimybių bendrą vaizdą.

Sekantis žingsnis ribinių teoremų didžiųjų nuokrypių problematikoje buvo žengtas L. Saulio (1969, 1973) darbuose, kuriuose gauti santykio $D_n(x)$ *asimptotiniai skleidiniai*, kai nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumos S_n atskiri dėmenys tenkina aukščiau apibrėžtas *Kramerio* arba *Liniko* sąlygas. Šiems klausimams yra skirti L. Saulio, E. Misevičiaus (1973), L. Saulio ir A. Nako (1973) ir kt. darbai.

Įvairių statistikų didžiųjų nuokrypių tikimybėms nagrinėti V. Statulevičius (1966) pasiūlė *kumuliantų (semiinvariantų) metodą*, reikalaudamas, kad bet koks atsitiktinis dydis X su vidurkiu

$\mathbf{E}X = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}X = 1$ tenkintų sąlygą: egzistuoja dydžiai $\gamma \geq 0$ ir $\Delta > 0$ tokie, kad

$$|\Gamma_k(X)| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-2}}, \qquad k = 3, 4, \ldots, \qquad (S_\gamma)$$

kur $\Gamma_k(X)$ - atsitiktinio dydžio X, $k - tosios$ eilės kumuliantas, apibrėžtas (2) lygybe. Pastebėsime, kad šiame darbe įrodyta lema tuo atveju, kai $\gamma = 0$, t.y. atsitiktinio dydžio X momentus generuojančioji funkcija $\varphi_X(z) = \mathbf{E}\exp\{zX\}$ yra analizinė $|z| < \Delta$ srityje. 1978 m. V.Statulevičius su savo mokiniais R.Rudzkiu ir L.Sauliu įrodė *bendrąją didžiųjų nuokrypių lemą*, t.y. kai atsitiktinis dydis X tenkina sąlygą (S_γ) (V.Statulevičius, R.Rudzkis, L.Saulis (1978)). Ši sąlyga, reikalaujanti kumuliantų reguliaraus mažėjimo, lengvai patikrinama, todėl labai patogi įvairių statistikų didžiųjų nuokrypių asimptotinei analizei. Dažnai vietoje tikslių didžiųjų nuokrypių lygybių pasitenkinama mažiau tikslesnėmis *eksponentinės nelygybės*, kurias įrodė R.Bentkus ir R.Rudzkis (1980), reikalaudami, kad bet koks atsitiktinis dydis X tenkintų sąlygą (S_γ). Bendroji didžiųjų nuokrypių lema ir eksponetinės nelygybės ir apibrėžia kumuliantų metodo esmę. Šių lemų pritaikymas įvairių statistikų didžiųjų nuokrypių teoremoms įrodyti pateiktas L.Saulio ir V.Statulevičiaus monografijoje (1989). Joje demonstruojama, jog norint gauti nagrinėjamai statistikai didžiųjų nuokrypių teoremas arba eksponentines nelygybes, b$\bar{\text{u}}$tina gautišios statistikos kumuliantų įverčius.

Kumuliantų metodas atvėrė plačias galimybes Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose gauti didžiųjų nuokrypių teoremas nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms, priklausomų atsitiktinių dydžių sumoms, politiesinėms formoms, kartotiniams stochastiniams integralams, sekų spektrinio tankio įverčiams, U $-$ statistikoms ir t.t.

A.Žemaitis (1974) gavo atsitiktinio dydžio X tikimybės $\mathbf{P}(X \geq x)$ asimptotinį skleidinį didžiųjų nuokrypių Kramerio zonoje, kai šis dydis tenkina sąlygą (S_γ) su $\gamma = 0$. Remiantis šiuo rezultatu buvo gautas asimptotinis skleidinys nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumos skirstiniui, atskiru atveju apibendrinantis L.Saulio rezultatą (1969). L.Saulis (1997) įrodė *bendrąją asimptotinio skleidinio Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose lemą*, kai atsitiktinis dydis X tenkina sąlygą (S_γ) kai $\gamma \geq 0$, pateikdamas liekamojo nario strukt$\bar{\text{u}}$rą. Remdamasis šia lema, L.Saulis (2000) gavo nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumos pasiskirstymo funkcijos asimptotinius skleidinius Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose.

Darbo aktualumas ir mokslinis naujumas

Šis darbas skirtas *atsitiktinių dydžių serijų schemoje normuotos sumos pasiskirstymo ir jo tankio funkcijų asimptotiniams skleidiniams gauti didžiųjų nuokrypių Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose*, kai sumos $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}$ atskiri dėmenys $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, su vidurkiu $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ ir dispersijomis ${\sigma_j^{(n)}}^2 = \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^2 > 0$, tenkina apibendrintą **S.N.Bernšteino** sąlygą: *egzistuoja dydžiai* $\gamma \geq 0$ ir $K_j^{(n)}$ *tokie, kad*

$$\left|\mathbf{E}\Big(\xi_j^{(n)}\Big)^k\right| \leq (k!)^{1+\gamma}(K_j^{(n)})^{k-2}{\sigma_j^{(n)}}^2, \qquad k = 3, 4, \ldots . \tag{B_γ}$$

Tai gana sudėtingas uždavinys, kuris tikimybių teorijos ir matematinės statistikos ribinių teoremų didžiųjų nuokrypių problematikoje sprendžiamas pirmą kartą. Jo naujumas ir originalumas tas, kad asimptotiniams skleidiniams su optimaliais liekamųjų narių įverčiais didžiųjų nuokrypių zonose gauti, be *kumuliantų metodo*, reikia naudoti ir klasikinį *charakteristinių funkcijų metodą*. Be to, sprendžiant darbe iškeltus uždavinius, skirtingai nuo gerai žinomų rezultatų iš tikimybių teorijos ir matematinės statistikos ribinių teoremų problematikos *reikia vertinti konstantas*. Tai dažnai techniškai gana sudėtingas uždavinys.

Darbe gautus rezultatus galima panaudoti *tikimybių teorijoje, matematinėje statistikoje, ekonometrijoje ir t.t.* Tai demonstruojama paskutiniame darbo skyriuje, kuriame įrodytos didžiųjų nuokrypių teoremos atsitiktinių dydžių sumavime su svoriais ir diskontavimo ribinės teoremos.

Disertacijos pagrindiniai rezultatai yra $4-5$ ir $8-9$ teoremos, kurių teiginiai gaunami dviem etapais. Jei sąlyga (B_γ) tenkinama, parodome, kad atsitiktinio dydžio $Z_n = B_n^{-1} S_n$, $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$, $k-tosios$ eilės kumuliantas $\Gamma_k(Z_n)$ tenkina nelygybę

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leq (k!)^{1+\gamma} \Delta_n^{2-k}, \qquad k = 3, 4, \dots,$$

kur

$$\Delta_n = K_n^{-1} B_n, \qquad K_n := 2 \max_{1 \leq j \leq n} \left(K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)} \right).$$

Čia $a \vee b = \max\{a, b\}$.

Antrajame etape, remiantis klasikiniu charakteristinių funkcijų metodu ir žinomais V. Statulevičiaus charakteristinių funkcijų įverčiais, gauti at.d. Z_n skirstinio ir jo tankio funkcijų asimptotinių skleidinių didžiųjų nuokrypių Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose liekamųjų narių įverčiai.

Darbo tikslai

Disertacijos tikslas, remiantis didžiųjų nuokrypių lemomis (L.Saulis (1997), (1989)), gauti at.d. Z_n tikimybės $\mathbf{P}(Z_n \geq x)$ ir atsitiktinių dydžių serijų schemoje normuotos sumos Z_n skirstinio tankio funkcijos asimptotinius skleidinius didžiųjų nuokrypių Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose ir liekamųjų narių įverčius, atitinkamai

$$R_{n,\gamma} = \int_{T_{n,\gamma}}^{T_n} |f_{n,\gamma}^*| \frac{dt}{t}, \qquad ir \qquad R_{n,\gamma}^* = \int_{T_{n,\gamma}}^{\infty} |f_{n,\gamma}^*| dt.$$

Čia

$$T_{n,\gamma} := (3/8)(1 - x/\Delta_{n,\gamma})\Delta_{n,\gamma}, \qquad T_n > T_{n,\gamma},$$

$$\Delta_{n,\gamma} := c_\gamma \Delta_n^{1/(1+2\gamma)}, \qquad c_\gamma = (1/6)(\sqrt{2}/6)^{1/(1+2\gamma)},$$

ir

$$f^*_{n,\gamma}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{s} \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}_{Z_n}(t), & \gamma > 0, \\ \\ f_{Z_n(h)}(t), & \gamma = 0, \end{cases}$$

$f_{Z_n(h)}(t)$ yra at.dydžio, kuris yra sujungtinis at. dydžiui Z_n, charakteristinė funkcija, apibrėžta formule (3.17), p.34. Integralų $R_{n,\gamma}$ ir $R^*_{n,\gamma}$ vertinimui naudojami V. Statulevičiaus (1965) bet kokio atsitiktinio dydžio ξ charakteristinės funkcijos $f_\xi := \mathbf{E}\exp\{it\xi\}$ įverčiai. Atkreipsime dėmesį, kad mums reikia gauti ne tik at.d. Z_n charakteristinės funkcijos $f_{Z_n}(t)$, bet ir jos išvestinių $f^{(k)}_{Z_n}(t)$, $k = 1, 2, \ldots,$ įverčius.

Disertacijos sandara ir apimtis

Disertaciją sudaro įvadas ir penki skyriai. Pirmajame skyriuje "Tyrimų apžvalga" aptariama, kas buvo padaryta šia tema kitų autorių Lietuvoje ir užsienyje ir disertacijos autoriaus atlikti darbai. Antrajame skyriuje "Bendrosios lemos" suformuluotos didžiųjų nuokrypių bendrosios lemos bet kokiam atsitiktiniam dydžiui ξ, pirmoji $-$ pasiskirstymo funkcijos asimptotiniam skleidiniui, antroji $-$ skirstinio tankio funkcijos asimptotiniam skleidiniui didžiųjų nuokrypių Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose. Taip pat suformuluota bendroji eksponentinių nelygybių lema bet kokiam atsitiktiniam dydžiui ξ.

Trečiajame skyriuje "Atsitiktinių dydžių serijų schemoje sumos pasiskirstymo funkcijos asimptotiniai skleidiniai didžiųjų nuokrypių Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose" įrodytos teoremos nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumos serijų schemoje pasiskirstymo funkcijai Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose.

Ketvirtajame skyriuje "Atsitiktinių dydžių serijų schemoje sumos skirstinio tankio funkcijos asimptotiniai skleidiniai didžiųjų nuokrypių zonose" gautas at.d. Z_n skirtinio tankio funkcijos asimptotinis skleidinys, bei jo liekamųjų narių įverčiai, Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose.

Penktajame skyriuje "Bendrųjų teoremų taikymai" įrodytos teoremos, kurios pritaikytos konkretiems atvejams: kai atsitiktiniai dydžiai sumuojami su svoriais ir diskontavimo ribinės teoremos.

1 Skyrius

Tyrimų apžvalga

Ribinių teoremų problematika, atsižvelgiant į didžiuosius nuokrypius, užima vieną iš pagrindinių vietų tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje. Žinomų mokslininkų A.J.Chinčino [12], H.V.Smirnovo [64], H.Kramerio [14], V.Felerio [18], J.V.Liniko [25], [26], V.V.Petrovo [39], [43], A.A.Borovkovo [7], A.A.Mogulskio [27], [28], V.M.Zolotariovo [70], J.V.Prochorovo [48], S.V.Nagajevo [31], [33], A.V.Nagajevo [29], [30], V.A.Statulevičiaus [53], [54], [65], [66], L.Saulio [57], [60], R.Rudzkio [53], [54], [55], A.Bikelio ir A.Žemaičio [4], [5] ir kt. darbais buvo sukurta didžiųjų nuokrypių teorija atsitiktinių dydžių sumoms.

Atsitiktinių vektorių sumos ir atsitiktinių dydžių sumos funkcionalams didžiųjų nuok- rypių teorijai tirti yra skirti A.A.Borovkovo, A.A.Mogulskio [6], [9], [10], B.A.Rogozino [8], A.V. Osipovo [36], [38], A.I.Sachanenko [56] ir kitų autorių darbai, kuriuose dominuoja charakteristinių funkcijų metodas.

Nagrinėjant priklausomų atsitiktinių dydžių sumavimą, minėto metodo tiesioginis taikymas yra gana sudėtingas. Pasirodo, kad atsitiktinių dydžių sumos charakteristinės funkcijos logaritminės išvestinės lengvai reiškiamos per atskirų dėmenų individualias savybes ir jų priklausomumo charakteristikas.

Nagrinėsime nepriklausomų atsitiktinių dydžių (at.d.)$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ seką, turinčią tą patį skirstinį su baigtine dispersija σ^2 ir matematiniu vidurkiu, kurį be jokių apribojimų galime laikyti lygiu nuliui. Pažymėkime:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad B_n^2 = \mathbf{D} S_n = n\sigma^2, \qquad Z_n = \frac{S_n}{B_n}, \tag{1.1}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{1.2}$$

$$F_n(x) = \mathbf{P}(Z_n < x). \tag{1.3}$$

Žinoma, kad $F_n(x) \to \Phi(x)$, $n \to \infty$ tolygiai atžvilgiu x, todėl srityje $x = O(1)$ gauname, kad

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \to 1, \qquad \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \to 1. \tag{1.4}$$

Iškyla poreikis nagrinėti šių santykių elgesį, tuo atveju, kai x neaprėžtai auga į begalybę kartu su n augimu. Reikia rasti sąlygas, kai pareinamybės (1.4) galioja srityje $0 \le x \le \Lambda(n)$, kur $\Lambda(n)$ - nemažėjanti funkcija yra tokia, kad $\Lambda(n) \to \infty$, $n \to \infty$.

Jei srityje $0 \le x \le \Lambda(n)$ yra teisingos pareinamybės (1.4), tai šią sritį vadinsime *konvergavimo į normalųjį dėsnį zona*.

Tokiu atveju mus domina normaliojo skirstinio uodegos ir nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos skirstinio uodegos santykinė paklaida.

Tikimybės $\mathbf{P}\{S_n > x_n\sigma\sqrt{n}\}$ ir $\mathbf{P}\{S_n < (-x_n)\sigma\sqrt{n}\}$, kur $x_n \to \infty$, kai $n \to \infty$ vadinamos *atsitiktinių dydžių sumos didžiųjų nuokrypių tikimybėmis*.

Sprendžiant nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumavimo didžiųjų nuokrypių uždavinius, nagrinėjamas tikimybės $\mathbf{P}\{Z_n \ge x\}$ arba $\mathbf{P}\{Z_n \le -x\}$, kai $x = x_n \to \infty$, kai $n \to \infty$, asimptotinis elgesys, konvergavimo greitis ir asimptotiniai skleidiniai.

Tokio tipo uždaviniai aptinkami įvairiose mokslo ir technikos srityse, pavyzdžiui, matematinėje statistikoje [11], [15], [50], informacijos teorijoje [16], [68], statistinėje fizikoje [69] ir t.t. Didžiųjų nuokrypių, t.y. mažų tikimybių analizės rezultatai yra pagrindinė matematinė priemonė patikimumo problemoms spręsti, kuriant technines sistemas, kuriose klaidos tikimybė turi būti maža.

Ši tikimybių teorijos sritis pradėta nagrinėti palyginti neseniai. Daugelis nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos didžiųjų nuokrypių rezultatų buvo gauta per paskutiniuosius 70 metų. Pirmuoju rezultatu galima laikyti A.J.Chinčino darbą [12] 1929 metais. Po to, A.J.Chinčinas įrodė lokalinę ir integralinę teoremas atsitiktiniams dydžiams, pasiskirsčiusiems pagal Bernulio dėsnį. Po keleto metų N.V.Smirnovas parašė vieną iš savo darbų [64], skirtą didžiųjų nuokrypių nagrinėjimui, kai atsitiktiniai dydžiai pasiskirstę pagal Bernulio dėsnį. Šie darbai skirti didžiųjų nuokrypių tikimybės nagrinėjimui, kai atsitiktiniai dydžiai yra *specialūs*.

1938 m. H.Krameris [13] iš esmės išnagrinėjo didžiųjų nuokrypių tikimybes, kai sumuojami nepriklausomi, vienodai pasiskirstę at.d., ir suformulavo sąlygą, užtikrinančią, momentus generuojančios funkcijos analiziškumą.

Kramerio sąlyga:

tegul nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, turintiems bendrą pasiskirstymo funkciją $F(x)$, yra teisinga sąlyga: egzistuoja teigiamas dydis H, toks, kad

$$\mathbf{E}e^{hX_j} < \infty, \qquad |h| < H. \tag{C}$$

Iš šios sąlygos išplaukia atsitiktinio dydžio X_j bet kurios eilės momentų egzistavimas, kurių augimas užtikrina momentus generuojančios funkcijos $\varphi_X(z) = \mathbf{E}\exp\{zX\}$ analiziškumą taško $z = 0$ aplinkoje. Taigi, ankščiau minėti darbai yra tik atskiri H.Kramerio darbo atvejai. 1943 m. V.Feleris [17] gavo analogišką rezultatą H.Kramerio rezultatui, kai nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai X_j yra aprėžti.

V.V.Petrovas [39], [40], [43] tęsė Kramerio darbus. Suformuluosime V.V.Petrovo teoremas nepriklausomiems vienodai pasiskirsčiusiems at.d.(1 TEOREMA) ir nevienodai pasiskirsčiusiems at.d. (2 TEOREMA).

T E O R E M A 1. *Jei at.d.* X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ *tenkina Kramerio sąlyga (A), tai at.d.* Z_n, *apibrėžto lygybe* (1.1), *pasiskirstymo funkcijai* $F_n(x)$ *intervale*

$$x \geq 0, \qquad x = o(\sqrt{n}), \qquad n \to \infty$$

galioja lygybės

$$\begin{aligned} \frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} &= \exp\left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \right\} \left[1 + O\Big(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\Big) \right], \\ \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} &= \exp\left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\Big(-\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \right\} \left[1 + O\Big(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\Big) \right], \end{aligned} \tag{1.5}$$

Čia $\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ *- konverguojanti laipsninė eilutė (Kramerio eilutė) su koeficientais* a_k, *kurie priklauso nuo atsitiktinio dydžio* X_j *kumulantų.*

V.V.Petrovas [39], [44] suformulavo ir įrodė teoremą nevienodai pasiskirsčiusiems at. dydžiams, tenkinantiems Kramerio sąlygą. Tegul $\{X_j; j = 1, 2, \ldots\}$ - nepriklausomų, nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka, su vidurkiais lygiais nuliui. Tarkime, kad egzistuoja skritulys su centru taške $z = 0$, kurio viduje kumuliantus generuojanti funkcija $L_j(z) = \log \mathbf{E} e^{zX_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ yra analizinė šio taško aplinkoje. Šio skritulio viduje funkcija $L_j(z)$ sutampa su laipsnine eilute:

$$L_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_{kj}}{k!} z^k.$$

Čia γ_{kj} - at. d. X_j, $k - tosios$ eilės kumuliantas. Turime, kad $\gamma_{1j} = \mathbf{E}X_j = 0$, $\gamma_{2j} = \mathbf{E}X_j^2$.

Tarkime,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2,$$
$$Z_n = S_n/B_n, \qquad F_n(x) = \mathbf{P}(Z_n < x). \tag{1.6}$$

T E O R E M A 2. *Tegul egzistuoja teigiamos konstantos H, $c_1, c_2, \ldots$, tokios, kad*

$$|L_j(z)| \le c_j \qquad skritulyje \qquad |z| < H \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{1.7}$$

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k^{3/2} < \infty, \qquad \liminf \frac{B_n^2}{n} > 0. \tag{1.8}$$

Jei $x \ge 0$, $x = o(\sqrt{n})$, $n \to \infty$, tai

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} \Big) \right\} \left[1 + O\Big(\frac{x+1}{\sqrt{n}} \Big) \right],$$
$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\Big(-\frac{x}{\sqrt{n}} \Big) \right\} \left[1 + O\Big(\frac{x+1}{\sqrt{n}} \Big) \right]. \tag{1.9}$$

Čia

$$\lambda_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} t^k \tag{1.10}$$

- laipsninė eilutė (Kramerio eilutė) su koeficientais a_{kn}, kurie išreiškiami per atsitiktinio dydžio X_j kumuliantus iki $k+3$ eilės imtinai. Jei $\Gamma_{kn} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}$, tai

$$a_{0n} = \frac{\Gamma_{3n}}{6 \Gamma_{2n}^{3/2}}, \qquad a_{1n} = \frac{\Gamma_{4n}\Gamma_{2n} - 3\Gamma_{3n}^2}{24 \Gamma_{2n}^3},$$
$$a_{2n} = \frac{\Gamma_{5n}\Gamma_{2n}^2 - 10\Gamma_{4n}\Gamma_{3n}\Gamma_{2n} + 15\Gamma_{3n}^3}{120 \Gamma_{2n}^{9/2}}.$$

Tuo atveju, kai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$ yra vienodai pasiskirstę, 2 teoremos sąlyga sutampa su momentus generuojančios funkcijos $\varphi(z) = \mathbf{E}\exp\{zX\}$ aprėžtumo sąlyga skritulyje $|z| < H$. Šiuo atskiru atveju $\lambda_n(t)$ eilutė sutampa su $\lambda(t)$ eilute, kurios koeficientai nepriklauso nuo n. Tokiu būdu, iš 2 teoremos išplaukia 1 teorema.

Kitas svarbus didžiųjų nuokrypių teorijos etapas yra J.V.Liniko tyrinėjimai. Jis savo darbuose [20], [24], [25], [26] įvedė susilpnintą Kramerio sąlygos variantą.

Liniko sąlyga:

tegul egzistuoja ν, $\frac{1}{2} < \nu < 1$, *kad*

$$\mathbf{E} \exp\left\{a|X_1|^{2-\frac{1}{\nu}}\right\} < \infty, \tag{L}$$

t.y. momentus generuojanti funkcija nėra analizinė, ir ištyrė didžiųjų nuokrypių tikimybes zonose $[0, \psi(n)]$, kur $\psi(n)$ - laisvoji monotonė funkcija, tenkinanti sąlygą $\lim_{n\to\infty} \psi(n) \to \infty$.

Zonos $[0, \psi(n)]$ vadinamos *integralinėmis*, kai $n \to \infty$.

J.V.Linikas gavo funkcijos $1 - F_n(x) = \mathbf{P}\{Z_n \geq x\}$, didžiųjų nuokrypių teoremą, kai dydžiai X_j, $j = 1, 2, \dots$ yra vienodai pasiskirstę ir tenkina sąlygą (L). Tegul $\rho(n)$ - funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\lim_{n\to\infty} \rho(n) = +\infty, \tag{1.11}$$

ir q - sveikasis neneigiamas skaičius, apibrėžiamas nelygybe

$$(q+1)/(q+2) < \nu \leq (q+2)/(q+3). \tag{1.12}$$

Pažymėkime Kramerio $-$ Petrovo eilutės $\lambda(t)$ [44] atkarpą $\lambda^{[m]}(t)$, sudarytą iš pirmųjų $(m+1)$ narių

$$\lambda^{[m]}(t) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k t^k. \tag{1.13}$$

T E O R E M A 3. *Tegul atsitiktinių dydžių seka* X_j, $j = 1, 2, \dots$ *tenkina sąlygą* (L) *ir sąlygą* $\lim_{|t|\to\infty} \sup |f_{X_1}(t)| < 1$, *intervale* $1 \le x \le n^{\nu - 1/2}/\rho(n)$, $1/2 < \nu < 1$ *yra teisingos lygybės*

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda^{[q]}\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \right\} \left[1 + O\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \right],$$
$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda^{[q]}\Big(-\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \right\} \left[1 + O\Big(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\Big) \right]. \tag{1.14}$$

S.V.Nagajevas darbuose [32], [34], [35] apibendrino didžiųjų nuokrypių teoremas Liniko zonose. L.Saulis [57], [58] gavo asimptotinius skleidinius Kramerio ir Liniko zonose nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms.

Naujas žingsnis nagrinėjant didžiųjų nuokrypių teoremas, tęsiant H.Kramerio, V.Liniko ir V.Petrovo darbus buvo 1966 m. *V.Statulevičiaus pasiūlytas kumuliantų metodas*.

Žinoma, kad atsitiktinio dydžio X, $k - tosios$ eilės momentas ir kumulantas atitinkamai lygūs

$$\alpha_k = \mathbf{E}X^k := \frac{1}{i^k} f_X(t)\Big|_{t=0}, \qquad \gamma_k := \frac{1}{i^k}\Big(\log f_X(t)\Big)^{(k)}\Big|_{t=0}, \tag{1.15}$$

$k = 1, 2, \dots$. Pasinaudoję formule

$$\log(1+z) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z^s, \qquad |z| < 1,$$

gauname lygybę

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \gamma_l (it)^l = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \alpha_l (it)^l \right)^s,$$

kuri leidžia kumulantus γ_k išreikšti per momentus α_k

$$\gamma_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} \alpha_{k_1} \dots \alpha_{k_n}. \tag{1.16}$$

Atskiru atveju:

$$\gamma_1 = \alpha_1; \qquad \gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;$$

$$\gamma_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3;$$

$$\gamma_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 - 3\alpha_2^2 + 12\alpha_2\alpha_1^2 - 6\alpha_1^4;$$

$$\gamma_5 = \alpha_5 - 5\alpha_4\alpha_1 - 10\alpha_3\alpha_2 + 20\alpha_3\alpha_1^2 - 60\alpha_2^2\alpha_1 - 24\alpha_1^5;$$

....

Atsitiktinio dyžio X kumulantus γ_k dar žymėsime $\Gamma_k(X)$. Momentų $\beta_k := \mathbf{E}|X|^k$ egzistavimas garantuoja bet kurios eilės, neviršijančios k, kumulantų egzistavimą.

BENDROJI DIDŽIŲJŲ NUOKRYPIŲ LEMA. Tegul bet koks atsitiktinis dydis ξ, su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 = 1$ tenkina **Statulevičiaus sąlygą**:

egzistuoja dydžiai $\gamma \geq 0$ ir $\Delta > 0$ tokie, kad bet kokio atsitiktinio dydžio ξ, $k - tosios$ eilės kumulantas, apibrėžtas lygybe (2) *tenkina nelygybę*:

$$|\Gamma_k(\xi)| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-2}}, \qquad k = 3, 4, \ldots. \qquad (S_\gamma)$$

L E M A 1. $[R.Rudzkis, L.Saulis, V.Statulevičius(1978)]$. *Jei atsitiktinis dydis ξ su $\mathbf{E}\xi = 0$ ir $\mathbf{E}\xi^2 = 1$ tenkina sąlygą (S_γ), tai intervale*

$$0 \leq x < \Delta_\gamma, \qquad \Delta_\gamma = c_\gamma \Delta^{\frac{1}{1+2\gamma}}, \qquad c_\gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{\frac{1}{1+2\gamma}},$$

galioja lygybės

$$\begin{aligned} \frac{1 - F_\xi(x)}{1 - \Phi(x)} &= exp\{L_\gamma(x)\}\Big(1 + \theta_1 f(x)\frac{x+1}{\Delta_\gamma}\Big), \\ \frac{F_\xi(-x)}{\Phi(-x)} &= exp\{L_\gamma(-x)\}\Big(1 + \theta_2 f(x)\frac{x+1}{\Delta_\gamma}\Big). \end{aligned} \qquad (1.17)$$

Čia

$$f(x) = \frac{60\Big(1 + 10\Delta_\gamma^2 exp\{ -(1 - x/\Delta_\gamma)\sqrt{\Delta_\gamma}\}\Big)}{1 - x/\Delta_\gamma}; \tag{1.18}$$

$$L_\gamma(x) = \sum_{3\le k\le p} \lambda_k x^k + \theta_3\Big(\frac{x}{\Delta_\gamma}\Big)^3, \qquad p = \begin{cases} 1/\gamma + 2, & \gamma > 0, \\ \infty, & \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Koeficientai λ_k, išreiškiami per atsitiktinio dydžio ξ kumuliantus, sutampa su Kramerio $-$ Petrovo eilutės koeficientais $[44]$. *Jie randami iš formulės*

$$\lambda_k = -b_{k-1}/k, \tag{1.20}$$

kur b_k apskaičiuojami nuosekliai sprendžiant lygtį

$$\begin{aligned} &b_1^{(1)} = 1, \qquad b_j^{(1)} = 0, \qquad j = 2, 3, \dots, \\ &b_j^{(1)} = \sum_{r=1}^{j} \frac{1}{r!}\Gamma_{r+1}(\xi) \sum_{\substack{j_1+\dots+j_r=j \\ j_i\ge 1}} \prod_{i=1}^{r} b_{j_i}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Atskiru atveju

$$\lambda_3 = (1/3)\Gamma_3(\xi),$$

$$\lambda_4 = (1/24)(\Gamma_4(\xi) - 3\Gamma_3^2(\xi)),$$

$$\lambda_5 = (1/120)(\Gamma_5(\xi) - 10\Gamma_3(\xi)\Gamma_4(\xi) + 15\Gamma_3^2(\xi)), \dots .$$

Koeficientams λ_k galioja įvertis

$$\lambda_k \le (2/k)(16/\Delta)^{k-2}((k+1)!)^\gamma, \qquad k = 3, 4, \dots . \tag{1.22}$$

Pastebėsime, kad sąlyga (S_γ), su $\gamma = 0$ užtikrina atsitiktinio dydžio ξ momentus generuojančios funkcijos $\varphi_\xi(z) := \mathbf{E}\exp\{z\xi\}$ analiziškumą taško $z = 0$ aplinkoje. Jei sąlyga (S_γ) tenkinama su $\gamma > 0$, tai tuomet egzistuoja atsitiktinio dydžio ξ visų eilių momentai, bet jų augimas neužtikrina analiziškumo taško $z = 0$ aplinkoje. V.Statulevičius minėtame darbe įrodė didžiųjų nuokrypių lemą, kai bet koks atsitiktinis dydis ξ tenkina sąlygą (S_γ), su $\gamma = 0$. Šiuo atveju įrodomos didžiųjų nuokrypių teoremos Kramerio zonoje.

Šią lemą supaprastino R.Rudzkis [52]. Vėliau darbą iš tos srities tęsė L.Saulis [59], [61], [62], N.Amosova [1], L.V.Rozovskis [51] ir kiti mokslininkai. Buvo įrodyta bendroji didžiųjų nuokrypių lema [53] ir eksponentinės nelygybės [3], kurių pagalba gaunamos didžiųjų nuokrypių teoremos nepriklausomų ir silpnai priklausomų atsitiktinių dydžių sumoms, kartotiniams stochastiniams integralams, politiesinėms formoms, stacionariojo atsitiktinio proceso spektrinio tankio įverčiams ir kitoms statistikoms.

2 Skyrius

Bendrosios lemos

Nagrinėsime atsitiktinį dydį (at.d.) $\xi = \xi_\Delta$, priklausantį nuo parametro Δ, su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = 0$, vienetine dispersija $\mathbf{D}\xi = 1$ ir pasiskirstymo funkcija $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$. Tegul $\varphi_\xi(z) = \mathbf{E}\exp\{z\xi\}$ ir $\Gamma_k(\xi)$ yra momentus generuojanti funkcija ir at.d. ξ, $k-tosios$ eilės kumuliantas, apibrėžtas lygybe (1.10) ir tenkinantis sąlygą (S_γ): *egzistuoja dydžiai* $\gamma \geq 0$ *ir* $\Delta > 0$ *tokie, kad at.d.* ξ, $k-tosios$ *eilės kumuliantui* $\Gamma_k(\xi)$ *galioja įvertis*:

$$|\Gamma_k(\xi)| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-2}}, \qquad k = 3, 4, \ldots. \tag{$\mathbf{S}_\gamma$}$$

Nagrinėjant pasiskirstymo funkcijos $F_\xi(x)$ ir skirstinio tankio funkcijos $p_\xi(x)$ (jei tankis egzistuoja) asimptotinius skleidinius, svarb$\overline{\text{u}}$s yra dydžiai

$$\Delta_\gamma := c_\gamma \Delta^{1/(1+2\gamma)}, \qquad c_\gamma = (1/6)(\sqrt{2}/6)^{1/(1+2\gamma)}. \tag{2.1}$$

Tegul θ su indeksu arba be jo reiškia bet kokį skaičių, neb$\overline{\text{u}}$tinai visada tą patį,$|\theta_i| \leq 1$; $[m]$ - skaičiaus m sveikoji dalis; $a \vee b = \max\{a, b\}$.

Toliau tegul

$$\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{1 - \Phi(x)}, \tag{2.2}$$

kur $\Phi(x)$ ir $\varphi(x)$ – standartinis normalusis skirstinys ir jo tankis atitinkamai, apibrėžti formulėmis (1.2).

Pažymėkime:

$$f^*_\gamma(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{s} \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!} f_\xi^{(k)}(t), & \gamma > 0, \\ \\ f_{\xi(h)}(t), & \gamma = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

kur $f_\xi^{(0)}(t) = f_\xi(t) = \mathbf{E}\exp\{it\xi\}$ - at.d ξ charakteristinė funkcija (ch.f.), $f_{\xi(h)}(x)$ - atsitiktinio dydžio $\xi(h)$, kuris yra sujungtinis atsitiktiniam dydžiui ξ, su tankio funkcija

$$p_{\xi(h)}(x) = e^{hx}p_\xi(x) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx}p_\xi(x)dx, \tag{2.4}$$

charakteristinė funkcija. Čia

$$s := 2[(1/2)(\Delta^2/18)^{1/(1+2\gamma)}] - 2 \tag{2.5}$$

ir $h = h(x)$ yra lygties

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\Gamma_k(\xi)h^{k-1} \tag{2.6}$$

sprendinys.

L E M A 2. $[L.Saulis(1996)]$. *Jei at.d. ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}\xi = 1$ tenkina sąlygą $(\mathbf{S}_\gamma)$, tada kiekvienam sveikam l, $l \geq 3$ ir $T \geq \frac{1}{2}T_\gamma$, $T_\gamma := \frac{3}{8}(1 - x/\Delta_\gamma)\Delta_\gamma$ intervale*

$$0 \leq x < \Delta_\gamma$$

galioja lygybė

$$\begin{aligned}\frac{1-F_\xi(x)}{1-\Phi(x)} &= \exp\{L_m^*(x)\}\biggl\{\frac{\psi(x)}{\psi(u)}\Bigl(1+\sum_{\nu=1}^{l-3}L_\nu(u)\Bigr)+\theta_1 8\sqrt{2\pi}(x+1)\\ &\times \biggl[\frac{c(l,\gamma,x)}{\Delta^{l-2}}+\frac{282\Delta_\gamma\exp\{-1(1-x/\Delta_\gamma)\sqrt{\Delta_\gamma}\}}{(1-x/\Delta_\gamma)}\\ &+ \frac{6q}{T}+\frac{2}{\pi}\int_{T_\gamma/2}^{T}|f_\gamma^*(t)|\frac{dt}{t}\biggr]\biggr\}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Čia

$$L_m^*(x)=\sum_{3\le k<m}\lambda_k x^k, \qquad m=\begin{cases}(1/\gamma)+l-1, & \gamma>0,\\ \infty, & \gamma=0.\end{cases} \tag{2.8}$$

Koeficientai λ_k *išreiškiami per at.d.* ξ *kumuliantus ir sutampa su Kramerio – Petrovo eilutės koeficientais* [44], *kurie randami iš formulės*

$$\lambda_k=-\frac{1}{k}b_{k-1},$$

kai koeficientai b_k *apskaičiuojami nuosekliai sprendžiant lygtis*

$$\begin{aligned} &b_1^{(1)}=1, \qquad b_j^{(1)}=0, \qquad j=2,3,\dots,\\ &b_j^{(1)}=\sum_{r=1}^{j}\frac{1}{r!}\Gamma_{r+1}(\xi)\sum_{\substack{j_1+\dots+j_r=j\\ j_i\ge 1}}\prod_{i=1}^{r}b_{j_i}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Atskiru atveju

$$\begin{aligned} &b_1=1, \qquad b_2=-\frac{1}{2}\Gamma_3(\xi),\\ &b_3=-\frac{1}{6}\Bigl(\Gamma_4(\xi)-3\Gamma_3^2(\xi)\Bigr),\\ &b_4=-\frac{1}{24}\Bigl(\Gamma_5(\xi)-10\Gamma_3(\xi)\Gamma_4(\xi)+15\Gamma_3^3(\xi)\Bigr),\dots\ .\end{aligned}$$

Koeficientams λ_k *galioja nelygybė*

$$|\lambda_k|\le(2/k)(16/\Delta)^{k-2}((k+1)!)^\gamma \qquad k=3,4,\dots.$$

Funkcija $\psi(x)$ *apibrėžta lygybe* (2.2). *Dydis*

$$u = u(x) = x\Big(1 + \sum_{k=1}^{l-3} c_k x^k + \theta_2 c^*(l)(x/\Delta)^{l-2}\Big), \tag{2.10}$$

kur koeficientų c_k *išraiškos per at.d.* ξ *kumuliantus apibrėžtos lygybe*

$$c_k = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_q=k\\ k_j\geq 2}} (-1)^{q+1} \frac{(2q-3)!!}{2q!!} \prod_{j=1}^{q} d_{k_j+2}, \tag{2.11}$$

$$d_k = \sum_{p=2}^{k} \frac{1}{(p-2)!} \Gamma_p(\xi) \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_q=k\\ k_j\geq 1}} \prod_{j=1}^{p} b_{k_j},$$

koeficientai b_k *apibrėžti formule* (1.21). *Atskiru atveju:*

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{1}{24}(2\Gamma_4(\xi) - 3\Gamma_3^2(\xi)),$$

$$c_3 = \frac{1}{24}(\Gamma_5(\xi) - 6\Gamma_3(\xi)\Gamma_4(\xi) + 6\Gamma_3^3(\xi)), \ldots,$$

ir

$$c^*(l,\gamma) = 736l(l-1)(7/2)^{l-2}(l!)^{\gamma}. \tag{2.12}$$

Daugianariai $L_\nu(u)$ *apibrėžti lygybe*

$$L_\nu(u) := \sum\nolimits^* M_{\nu+2s}(u) \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \Big(\frac{\tilde{\Gamma}_{m+2}(h)}{(m+2)!}\Big)^{k_m}, \tag{2.13}$$

kur

$$M_j(u) = \sum_{k=0}^{j/2} (-1)^k \frac{j!}{k!(j-2k)!2^k} \omega_{j-2k}(u), \tag{2.14}$$

$$\omega_m(u) := \int_u^\infty (t-u)^m e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \Big/ \int_u^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \tag{2.15}$$

Čia $\sum^*$ *žymi sumavimą pagal visus sveikuosius ir neneigiamus lygties* $k_1 + 2k_2 + \ldots + \nu k_\nu = \nu$ *sprendinius ir* $k_1 + \ldots + k_\nu = s$.

Čia

$$\tilde{\Gamma}_k(h) := \frac{\tilde{K}_l^{(k)}(h)}{\tilde{\sigma}^k(h)}, \qquad \tilde{K}_l^{(m)}(z) := \sum_{k=m}^{l-1} \frac{1}{(k-m)!}\Gamma_k(\xi)z^{k-m},$$
$$\tilde{\sigma}^2 := \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{(k-2)!}\Gamma_k(\xi)h^{k-2}, \tag{2.16}$$

kur s *ir* h *apibrėžiami atitinkamai lygybėmis* (2.5), (2.6).

Atskiru atveju:

$$\begin{aligned} L_1(u(x)) &= -\frac{1}{2}\Gamma_3(\xi)\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\Big(2\Gamma_4(\xi) - 3\Gamma_3^2(\xi)\Big) + \frac{1}{48}\Big(72\Gamma_5(\xi) \\ &- 394\Gamma_3(\xi)\Gamma_4(\xi) + 267\Gamma_3^3(\xi)\Big)x + \ldots, \\ L_2(u(x)) &= \frac{1}{24}\Big(3\Gamma_4(\xi) - 5\Gamma_3^2(\xi)\Big) + \frac{1}{24}\Big(3\Gamma_5(\xi) \\ &- 16\Gamma_3(\xi)\Gamma_4(\xi) + 15\Gamma_3^3(\xi)\Big)x + \ldots. \end{aligned}$$

Dydžiai $c(l,\gamma,x)$ *ir* q*, atitinkamai apibrėžti formulėmis*

$$\begin{aligned} c(l,\gamma,x) &= (3/2\sqrt{2\pi})(l-3)4^l 26^{l/2}(l!)^\gamma(x^{l-3} + (l-3)!!x) \\ &+ (1/\sqrt{2\pi})72^l 6^{(1+\gamma)(l-3)}(3l-8)!!(l!)^\gamma, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$q := \sup_y |G_h'(y)|, \qquad G_h(y) = \Phi(y) - \sum_{\nu=1}^{l-3} p_\nu(h,\nu)\varphi(y), \tag{2.18}$$

kur

$$p_\nu(h,y) := \sum\nolimits^* H_{\nu+2s-1}(y)\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}\left(\frac{\tilde{\Gamma}_{m+2}(h)}{(m+2)!}\right)^{k_m}, \tag{2.19}$$

čia - $H_m(x)$ *Čebyševo - Ermito* m *- eilės daugianaris.*

Tegul at.d. ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = 0$ ir vienetine dispersija $\mathbf{D}\xi = 1$ egzistuoja skirstinio tankis $p_\xi(x)$ ir, be to

$$\sup_x p_\xi(x) < \infty \tag{D}$$

$\mathcal{E}$ žymėsime aibę tiesės taškų, kuriuose $p_\xi(x)$ netrūki arba turi pirmosios rūšies trūkį, be to, tarsime, kad trūkio taške x_0

$$p(x_0) := (1/2)(p(x_0 - 0) + p(x_0 + 0)).$$

Pažymėkime

$$c_1(\gamma) = 2\sqrt{\pi} + 6^\gamma 25^3 \sqrt{2\pi}/\Delta, \tag{2.20}$$

$$\varepsilon(\Delta, \gamma) = \frac{1}{12}\Big(1 - \frac{x}{\Delta_\gamma}\Big)\Delta_\gamma, \qquad 0 \le x < \Delta_\gamma, \tag{2.21}$$

$$q(l, \gamma) = \Big(\frac{3\sqrt{2e}}{2}\Big)^l 8(l+2)^2 6^{\gamma(l+1)}((l+1)!)^{\gamma(l-1)}\Gamma\Big(\frac{3l+1}{2}\Big), \tag{2.22}$$

čia $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, kai $\alpha = n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, ir

$$\begin{aligned} r^*(\Delta, x) = &\bigg(1 + 9((m+2)!)^\gamma 16^{m-1} c_\gamma^{m+1-l} \frac{1}{m+1}\Big(\frac{x}{\Delta}\Big)^l\bigg) \\ &\times \bigg(1 + 46\Delta_\gamma \exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x}{\Delta_\gamma}\Big)\sqrt{\Delta_\gamma}\Big\}\Big/\Big(1 - \frac{x}{\Delta_\gamma}\Big)\bigg), \end{aligned} \tag{2.23}$$

$m = (1+\gamma) + l + 1$, $\gamma > 0$, $l \ge 1$ ir $r^*(\Delta, x) \equiv 0$, kai $\gamma = 0$.

L E M A 3. $[L.Saulis(1991)]$. *Jei at.d.* ξ *su vidurkiu* $\mathbf{E}\xi = 0$ *ir dispersija* $\mathbf{D}\xi = 1$ *tenkina sąlygas* $(\mathbf{S}_\gamma)$ *ir* $(\mathbf{D})$, *tada kiekvienam* l, $l \ge 1$, *intervale*

$$0 \le x < \Delta_\gamma$$

galioja asimptotinis skleidinys

$$\begin{aligned} \frac{p_\xi(x)}{\varphi(x)} \;&=\; \exp\{L_m(x)\}\bigg(1 + \sum_{\nu=0}^{l-1} M_\nu(x) + \theta_1 q(l,\gamma)\Big(\frac{x+1}{\Delta}\Big)^l \\ &+\; \theta_2 c_1(\gamma)\Delta_\gamma^{3/2} \exp\Big\{-\frac{1}{72}\Big(1 - \frac{x}{\Delta_\gamma}\Big)\sqrt{\Delta_\gamma}\Big\} \\ &+\; \theta_3 \int_{|t| \ge \varepsilon(\Delta,\gamma)} |f_\gamma^*(t)|dt\bigg)(1 + \theta r^*(\Delta, x)). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dydžiai Δ_γ, $c_1(\gamma)$, $q(l,\gamma)$, $\varphi(x)$, $f^*_\gamma(t)$ *ir* $\varepsilon(\Delta, x)$ *atitinkamai apibrėžti formulėmis* (2.1), (2.20), (2.22), (1.2), (2.3) *ir* (2.21).

Daugianariams $M_\nu(x)$ *galioja formulės*

$$\begin{aligned} M_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\nu} K_k(x) q_{\nu-k}(x), && (2.25)\\ K_\nu(x) &= \sum \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!}\Big(-\lambda_{m+2}x^{m+2}\Big)^{k_m}, \qquad K_0(x) \equiv 1, && (2.26)\\ q_\nu(x) &= \sum H_{\nu+2l}(x) \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!}\Big(\Gamma_{m+2}(\xi)/(m+2)!\Big)^{k_m}, && (2.27) \end{aligned}$$

kur $H_m(x)$ *Čebyševo* $-$ *Ermito* m $-$ *eilės daugianaris ir sumuojama pagal visus sveikuosius ir neneigiamus lygties* $k_1 + 2k_2 + \ldots + \nu k_\nu = \nu$ *sprendinius ir* $k_1 + \ldots + k_\nu = l$. *Atskiru atveju* $M_\nu(x)$ *išreiškiami per at.d.* ξ *kumuliantus:*

$$\begin{aligned} M_0(x) &\equiv 0, \qquad M_1(x) = -\frac{1}{2}\Gamma_3(\xi)x,\\ M_2(x) &= \frac{1}{8}\Big(5\Gamma_3^2(\xi) - 2\Gamma_4(\xi)\Big)x^2 + \frac{1}{24}\Big(3\Gamma_4(\xi) - 5\Gamma_3^2(\xi)\Big),\\ M_3(x) &= (1/48)\Big(34\Gamma_3(\xi)\Gamma_4(\xi) - 4\Gamma_5(\xi) - 45\Gamma_3^3(\xi)\Big)x^3\\ &+ (1/48)\Big(6\Gamma_5(\xi) - 35\Gamma_3(\xi)\Gamma_4(\xi) + 35\Gamma_3^2(\xi)\Big)x, \ldots . \end{aligned}$$

L E M A 4. $[R.Bentkus, R.Rudzkis, (1980)]$. *Tegul bet kokiam at.d.* ξ *su* $\mathbf{E}\xi = 0$ *egzistuoja dydžiai* $\gamma \geq 0$, $H > 0$ *ir* $\overline{\Delta}$ *tokie, kad*

$$|\Gamma_k(\xi)| \leq \left(\frac{k!}{2}\right)^{1+\gamma} \frac{H}{\overline{\Delta}^{k-2}}, \qquad k = 2, 3, \ldots . \tag{2.28}$$

Tada visiems $x \geq 0$

$$\mathbf{P}(\pm\xi \geq x) \leq \exp\left\{ -\frac{x^2}{2\Big(H + (x/\overline{\Delta}^{1/(1+2\gamma)})\Big)^{(1+2\gamma)/(1+\gamma)}} \right\}. \tag{2.29}$$

Be nurodytų straipsnių, pilni **3 LEMOS** ir **4 LEMOS** įrodymai pateikti [60].

3 Skyrius

Atsitiktinių dydžių serijų schemoje sumos pasiskirstymo funkcijos asimptotiniai skleidiniai didžiųjų nuokrypių Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose

3.1 Pagrindinių rezultatų formulavimas

Tegul $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ nepriklausomų atsitiktinių dydžių (at.d.) seka su vidurkiais $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ ir dispersijomis ${\sigma_j^{(n)}}^2 = \mathbf{E}{\xi^{(n)}}_j^2 > 0$, $j = \overline{1, n}$.

Pažymėkime:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}, \qquad B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} {\sigma_j^{(n)}}^2, \qquad Z_n = \frac{S_n}{B_n}, \tag{3.1}$$

$$F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}(Z_n < x), \qquad p_{Z_n}(x) = \frac{d}{dx} F_{Z_n}(x), \tag{3.2}$$

$$L_{k,n} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j^{(n)}|^k / B_n^k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.3}$$

Dydis $L_{k,n}$ vadinamas $k - tosios$ eilės Liapunovo trupmena, ir visiems $3 \le k \le l$,

$$L_{k,n}^{1/(k-2)} \le L_{l,n}^{1/(l-2)}. \tag{3.4}$$

Šią nelygybę įrodė V.Statulevičius [65]. Tegul $f_\xi(t)$ ir $\Gamma_k(\xi)$ yra at.d. ξ charakteristinė funkcija (ch.f.) ir $k - tosios$ eilės kumuliantas. Toliau reikalausime, kad at.d. $\xi_j^{(n)}$ tenkintų **Bernšteino sąlyga**$(\mathbf{B}_\gamma)$: *egzistuoja dydžiai* $\gamma \ge 0$ *ir* $K_j^{(n)} > 0$ *tokie, kad*

$$|\mathbf{E}(\xi_j^{(n)})^k| \le (k!)^{1+\gamma} (K_j^{(n)})^{k-2} {\sigma_j^{(n)}}^2, \qquad k = 3, 4, \ldots. \tag{$\mathbf{B}_\gamma$}$$

Jei sąlyga $(\mathbf{B}_\gamma)$ yra tenkinama, tai at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k - tosios$ eilės kumuliantui $\Gamma_k(\xi_j^{(n)})$, galioja nelygybė

$$|\Gamma_k(\xi_j^{(n)})| \le (k!)^{1+\gamma} (2(K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)}))^{k-2} {\sigma_j^{(n)}}^2, \qquad k = 3, 4, \ldots. \tag{3.5}$$

Šios nelygybės įrodymas gautas darbe [60, p. 42].

T E I G I N Y S 1. *Jei at.d. serijų seka* $\xi_j^{(n)}, j = \overline{1,n}$, *tenkina sąlygą* $(\mathbf{B}_\gamma)$, *tai at.d.* Z_n, $k - tosios$ *eilės kumuliantui* $\Gamma_k(Z_n)$ *galioja įvertis*

$$|\Gamma_k(Z_n)| \le \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta_n^{k-2}}, \qquad k = 3, 4, \dots\ , \tag{3.6}$$

kur

$$\Delta_n = \frac{B_n}{K_n}, \qquad K_n := 2 \max_{1 \le j \le n} (K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)}). \tag{3.7}$$

Toliau reikalausime, kad $\Delta_n \to \infty$, kai $n \to \infty$.

ĮRODYMAS. Pastebėsime, kad $\mathbf{E}Z_n = 0$, $\mathbf{D}Z_n = 1$. Atsižvelgę į tai, kad at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = \overline{1,n}$, yra nepriklausomi, gauname

$$f_{Z_n}(t) = f_{S_n}(t/B_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j^{(n)}}(t/B_n), \tag{3.8}$$

ir

$$\Gamma_k(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_k(\xi_j^{(n)}). \tag{3.9}$$

Remiantis at.d. ξ, $k - tosios$ eilės kumulianto apibrėžimu (1.10), nesunku įsitikinti, kad

$$\Gamma_k(Z_n) = \Gamma_k(S_n)/B_n^k. \tag{3.10}$$

Dabar, pasinaudoję lygybe (3.9)ir įverčiu (3.5), gauname

$$|\Gamma_k(S_n)| \le \sum_{j=1}^{n} |\Gamma_k(\xi_j^{(n)})| \le (k!)^{1+\gamma} K_n^{k-2} B_n^2, \qquad k = 3, 4, \dots, \tag{3.11}$$

kur K_n apibrėžtas lygybe (3.7). Remdamiesi gautu įverčiu lygybe (3.10) gauname įvertį (3.6).

$\blacksquare$

Toliau visur reikalausime, kad at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = \overline{1,n}$ egzistuotų tankis $p_{\xi_j^{(n)}}(x)$ ir

$$\sup_x p_{\xi_j^{(n)}}(x) \le C_j^{(n)} < \infty. \tag{$\mathbf{D}$}$$

Tuo atveju, kai at.d. $\xi_j^{(n)}$ tankis neegzistuoja, tariame, kad $C_j^{(n)} = \infty$.

Tegul at.d. $\xi_j^{(n)}(h)$ yra sujungtinis atsitiktiniam dydžiui $\xi_j^{(n)}$, $j = \overline{1,n}$ su tankio funkcija

$$p_{\xi_j^{(n)}(h)}(y) := e^{hy} p_{\xi_j^{(n)}}(y) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} p_{\xi_j^{(n)}}(y) dy. \tag{3.12}$$

Pažymėkime

$$S_n(h) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}(h), \qquad Z_n(h) = B_n^{-1}(h)(S_n(h) - M_n(h)). \tag{3.13}$$

Nesunku įsitikinti, kad

$$M_n(h) = \mathbf{E} S_n(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \Gamma_k(S_n) h^{k-1}, \tag{3.14}$$

$$B_n^2(h) = \mathbf{D} S_n(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \Gamma_k(S_n) h^{k-2}, \tag{3.15}$$

kur dydis $h = h(x)$ yra lygties

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \Gamma_k(Z_n) h^{k-1} \tag{3.16}$$

sprendinys.

Tegul, $f_{Z_n(h)}(t)$ yra at.d. $Z_n(h)$ charakteristinė funkcija. Kadangi at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = \overline{1,n}$, yra nepriklausomi, tai nesunku įsitikinti, kad

$$f_{Z_n(h)}(t) = \mathbf{E} e^{itZ_n(h)} = \exp\left\{-it\frac{M_n(h)}{B_n(h)}\right\} \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j^{(n)}(h)}\Big(\frac{t}{B_n(h)}\Big). \tag{3.17}$$

Žymėsime

$$f_{n,\gamma}^*(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{s} \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!} f_{Z_n}^{(k)}(t), & \gamma > 0, \\ \\ f_{Z_n(h)}(t), & \gamma = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

kur s ir Δ_n, atitinkamai apibrėžti lygybėmis (2.5) ir (3.7).

Nagrinėjant at.d. Z_n tikimybės $\mathbf{P}(Z_n \geq x)$ asimptotinius skleidinius, yra svarbūs dydžiai

$$\Delta_{n,\gamma} := c_\gamma \Delta_n^{1/(1+2\gamma)}, \qquad c_\gamma = (1/6)(\sqrt{2}/6)^{1/(1+2\gamma)}, \tag{3.19}$$

$$T_{n,\gamma} := (3/8)(1 - x/\Delta_{n,\gamma})\Delta_{n,\gamma}, \qquad 0 \leq x < \Delta_{n,\gamma}. \tag{3.20}$$

T E I G I N Y S 2. *Jei at.d.* $\xi_j^{(n)}$, $j = \overline{1,n}$, *su* $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ *ir* ${\sigma_j^{(n)}}^2 = \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^2 > 0$, $j = \overline{1,n}$, *tenkina sąlygą* $(\mathbf{B}_\gamma)$, *tai bet kokiam sveikajam* l, $l \geq 3$, *ir* $T_n \geq T_{n,\gamma}$, *intervale*

$$0 \leq x < \Delta_{n,\gamma}$$

galioja lygybė

$$\begin{aligned} \frac{1 - F_{Z_n}(x)}{1 - \Phi(x)} &= \exp\{L^*_{n,m}(x)\}\left\{\frac{\psi(x)}{\psi(u_n(x))}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{l-3} P_{\nu,n}(u_n(x))\right) + \theta_1(x+1)\right. \\ &\times \left(\frac{c(l,\gamma,x)}{\Delta_n^{l-2}} + \frac{285\Delta_n \exp\{-(1 - x/\Delta_{n,\gamma})\sqrt{\Delta_{n,\gamma}}\}}{(1 - x/\Delta_{n,\gamma})}\right. \\ &+ \left.\left.\frac{6q}{T_n} + R_{n,\gamma}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Čia

$$L^*_{n,m}(x) = \sum_{3 \leq k < m} \lambda_{k,n} x^k, \qquad m = \begin{cases} (1/\gamma) + l - 1, & \gamma > 0, \\ \infty\,, & \gamma = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

kur koeficientai $\lambda_{k,n}$ *randami iš formulės* (2.8) *ir išreiškiami per at.d.* Z_n *kumuliantus. Atskiru atveju:*

$$\begin{aligned} &\lambda_{3,n} = (1/3)\Gamma_3(Z_n), \\ &\lambda_{4,n} = \Big(1/24\Big)\Big(\Gamma_4(Z_n) - 3\Gamma_3^2(Z_n)\Big), \\ &\lambda_{5,n} = \Big(1/120\Big)\Big(\Gamma_5(Z_n) - 10\Gamma_3(Z_n)\Gamma_4(Z_n) + 15\Gamma_3^2(Z_n)\Big), \ldots\,. \end{aligned}$$

Be to, koeficientams $\lambda_{k,n}$ *galioja įvertis*

$$|\lambda_{k,n}| \leq (2/k)(16/\Delta_n)^{k-2}((k+1)!)^\gamma, \qquad k = 3, 4, \ldots\,. \tag{3.23}$$

Funkcija $\psi(x)$ *apibrėžta formule* (2.2), *dydis*

$$u_n(x) = x\Big(1 + \sum_{k=1}^{l-3} c_{k,n} x^k + \theta_2 c^*(l)(x/\Delta_n)^{l-2}\Big), \tag{3.24}$$

kur $c^*(l,\gamma) = 736l(l-1)(7/2)^{l-2}(l!)^\gamma$, *koeficientai* $c_{k,n}$ *išreiškiami per at.d.* Z_n *kumuliantus ir randami iš formulės* (2.11). *Atskiru atveju:*

$$\begin{aligned}
c_{1n} &= 0,\\
c_{2n} &= \frac{1}{24}\Big(2\Gamma_4(Z_n) - 3\Gamma_3^2(Z_n)\Big),\\
c_{3n} &= \frac{1}{24}\Big(\Gamma_5(Z_n) - 6\Gamma_3(Z_n)\Gamma_4(Z_n) + 6\Gamma_3^3(Z_n)\Big), \ldots .
\end{aligned}$$

Daugianariai $L_{\nu,n}\Big(u_n(x)\Big)$ *apibrėžti lygybe* (2.8). *Atskiru atveju,*

$$\begin{aligned}
L_{1,n}(u_n(x)) &= -\frac{1}{2}\Gamma_3(Z_n)\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\Big(2\Gamma_4(Z_n) - 3\Gamma_3^2(Z_n)\Big) + \frac{1}{48}\Big(72\Gamma_5(Z_n)\\
&- 394\Gamma_3(Z_n)\Gamma_4(Z_n) + 267\Gamma_3^3(Z_n)\Big)x + \ldots,\\
L_{2,n}(u_n(x)) &= \frac{1}{24}\Big(3\Gamma_4(Z_n) - 5\Gamma_3^2(Z_n)\Big) + \frac{1}{24}\Big(3\Gamma_5(Z_n)\\
&- 16\Gamma_3(Z_n)\Gamma_4(Z_n) + 15\Gamma_3^3(Z_n)\Big)x + \ldots .
\end{aligned}$$

Dydžiai $c(l,\gamma,x)$ *ir* q *apibrėžti atitinkamai lygybėmis* (2.17) *ir* (2.18). *Asimptotinio skleidinio* (3.21) *liekamasis narys*

$$R_{n,\gamma} = \int_{T_{n,\gamma}}^{T_n} |f^*_{n,\gamma}(t)|\frac{dt}{t}, \tag{3.25}$$

kur $T_n \geq T_{n,\gamma}$, $T_{n,\gamma}$ *ir* $f^*_{n,\gamma}(t)$ *nusakyti formulėmis* (3.20) *ir* (3.18).

Remdamiesi 2 TVIRTINIMU ir pareikalavę, kad sąlyga $(\mathbf{B}_\gamma)$ būtų įvykdyta, rasime tikimybės $\mathbf{P}(Z_n \geq x) = 1 - F_{Z_n}(x)$ asimptotinio skleidinio liekamojo nario $R_{n,\gamma}$, apibrėžto lygybe (3.25), įverčius Kramerio, kai $\gamma = 0$ ir laipsninėse Liniko zonose, kai $\gamma > 0$. Šį darbą atlikti mums palengvins žinomi charakteristinių funkcijų įverčiai, kai tenkinama sąlyga $(\mathbf{D})$ (V.Statulevičius [65]). Šiame skyriuje gauti rezultatai yra išspausdinti straipsniuose:

1. Deltuvienė D. Asymptotic expansion for the distribution function of the series scheme of random variables in the large deviation Cramer zone, Lietuvos matematikos rinkinys, T. **42**, spec.nr.42, Vilnius, MII, 2002, psl. 691-696.

2. Deltuvienė D., Saulis L. Asymptotic expansions in the large deviation zones for the distribution function of sums of random variables in the series scheme, Lietuvos matematikos rinkinys, T.**43**, spec. nr. 43, Vilnius, MII, 2003, psl. 682 - 686.

Tuo atveju, kai $\gamma = 0$, dydį $\Delta_{n,\gamma}$, apibrėžtą lygybe (3.19), žymėsime

$$\Delta_{n,0} = c_0 \Delta_n, \qquad c_0 = (1/6)(\sqrt{2}/6),$$
$$T_{n,0} = (1/8)(1 - x/\Delta_{n,0})\Delta_{n,0}, \tag{3.26}$$

kur dydis

$$\Delta_n = \frac{B_n}{K_n}, \qquad K_n := 2 \max_{1 \le j \le n} (K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)}).$$

T E O R E M A 4. *Jei at.d.* $\xi_j^{(n)}$ *su* $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ *ir* ${\sigma_j^{(n)}}^2 = \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^2 > 0$, $j = \overline{1, n}$, *tenkina sąlygas* (B_γ) *su* $\gamma = 0$ *ir* (D), *tai su visais* x,

$$0 \le x < \Delta_{n,0} \qquad (Kramerio \qquad zonoje)$$

yra teisingas asimptotinis skleidinys (3.21) *su liekamojo nario įverčiu*

$$\begin{aligned} R_{n,0} \quad &\le \quad 684 e^4 \pi \sqrt{2\pi} K_n \max_{1 \le r_i \le n} \prod_{i=1}^{4} {C_{r_i}^{(n)}}^{1/4} \exp\Big\{ -\frac{1}{24 K_n^2} \sum_{j=1}^{n} {C_k^{(n)}}^{-2} \Big\} \\ &+ \quad \frac{\pi^2}{2T_{n,0}} \exp\Big\{ -\frac{1}{\pi^2} T_{n,0}^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

T E O R E M A 5. *Tegul at.d.* $\xi_j^{(n)}$, $j=1,2,\dots$ *su* $\mathbf{E}\xi_j^{(n)}=0$ *ir* $\sigma_j^{(n)^2}=\mathbf{E}\xi_j^{(n)^2}>0$, $j=\overline{1,n}$, *tenkina sąlygas* $(\mathbf{B}_\gamma)$ *su* $\gamma>0$, $(\mathbf{D})$ *ir*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{(1\vee L_{1,n})\Delta_{n,\gamma}}\frac{1}{K_n^2}\sum_{j=1}^{n}C_j^{(n)^{-2}}\geq d>0, \tag{$\mathbf{L}$}$$

tai su visais x

$$0\leq x<\Delta_{n,\gamma}\qquad (Liniko\qquad zonose)$$

yra teisingas asimptotinis skleidinys (3.21) *su liekamojo nario įverčiu*

$$\begin{aligned} R_{n,\gamma} &\leq c_4(\gamma)(K_n/\Delta_n)\max_{1\leq r_i\leq n}\prod_{i=1}^{4}C_{r_i}^{(n)^{1/4}}\Big\{-\frac{c_3}{2K_n^2}\sum_{k=1}^{n}C_k^{(n)^{-2}}\Big\} \\ &+ T_{n,\gamma}^2\exp\Big\{-\frac{1}{16\pi^2}T_{n,\gamma}^2\Big\}+\frac{5\pi^2x^2}{8}T_{n,\gamma}\exp\Big\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\Big\}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

kur K_n, $\Delta_{n,\gamma}$ *ir* $T_{n,\gamma}$ *atitinkamai apibrėžti lygybėmis* (3.7), (3.19) *ir* (3.20).

T E O R E M A 6. *Tegul nepriklausomų at.d. seka* $\xi_j^{(n)}$, $j=1,2,\dots$ *su vidurkiais* $\mathbf{E}\xi_j^{(n)}=0$ *ir nenulinėmis baigtinėmis dispersijomis* $\sigma_j^{(n)^2}=\mathbf{E}\xi_j^{(n)^2}<\infty$, $j=\overline{1,n}$, *tenkina apibendrintą Bernšteino sąlygą* $(\mathbf{B}_\gamma)$. *Tuomet intervale*

$$0\leq x\leq\Delta_{n,\gamma}$$

galioja didžiųjų nuokrypių lygybės

$$\begin{aligned} \frac{1-F_{Z_n}(x)}{1-\Phi(x)} &= exp\{L_{n,\gamma}(x)\}\Big(1+\theta_1 f_1(x)\frac{x+1}{\Delta_{n,\gamma}}\Big), \\ \frac{F_{Z_n}(-x)}{\Phi(-x)} &= exp\{L_{n,\gamma}(-x)\}\Big(1+\theta_2 f_2(x)\frac{x+1}{\Delta_{n,\gamma}}\Big), \end{aligned} \tag{3.29}$$

kur

$$f(x)=\frac{60\Big(1+10\Delta_{n,\gamma}^2 exp\{-(1-x/\Delta_{n,\gamma})\sqrt{\Delta_{n,\gamma}}\}\Big)}{1-x/\Delta_{n,\gamma}},$$

$i=1,2$*;* $L_{n,\gamma}(x)$ *ir* $\Delta_{n,\gamma}$ *atitinkamai apibrėžti lygybėmis* (3.22) *ir* (3.19).

I Š V A D A 1. *Tegul* $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots$ *- nepriklausomų at.d. seka su vidurkiais* $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ *ir nenulinėmis baigtinėmis dispersijomis* $\sigma_j^2 = \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^2 < \infty$, $j = \overline{1, n}$, *tenkina apibendrintą Bernšteino sąlygą* $(\mathbf{B}_\gamma)$. *Tada visiems*

$$x = o(\Delta_{n,\gamma}^\tau), \qquad \tau = \tau(\gamma) = \frac{1}{1 + 2(1 \vee \gamma)},$$

$\Delta_{n,\gamma} \to \infty$, *kai* $n \to \infty$ *galioja lygybės*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F_{Z_n}(x)}{1 - \Phi(x)} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{F_{Z_n}(-x)}{\Phi(-x)} = 1. \tag{3.30}$$

T E O R E M A 7. *Tegul* $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots$ *- nepriklausomų at.d. seka tenkina sąlygą* $(\mathbf{B}_\gamma)$. *Tada at.d.* Z_n, *apibrėžto formule* (3.1) *tikimybei* $\mathbf{P}(\pm Z_n \geq x)$, *su* $H = 2^{1+\gamma}$ *galioja eksponentinės nelygybės*

$$\mathbf{P}\{\pm Z_n \geq x\} \leq \begin{cases} \exp\Big\{ -\dfrac{1}{4H} x^2 \Big\}, & 0 \leq x < (H\Delta_n)^{1/(1+2\gamma)}, \\ \\ \exp\Big\{ -\frac{1}{4} (x\Delta_n)^{1/(1+\gamma)} \Big\}, & x \geq (H\Delta_n)^{1/(1+\gamma)}, \end{cases} \tag{3.31}$$

kur Δ_n *apibrėžtas formule* (3.7).

4 - 5 teoremų įrodyme mums reikia vertinti integralą

$$R_{n,\gamma} = \int_{T_{n,\gamma}}^{T_n} |f_{n,\gamma}^*(t)| \frac{dt}{t},$$

kur $f_{n,\gamma}^*(t)$ apibrėžta lygybe (3.18). Siekiant šio tikslo mums reikia gauti at.d. Z_n charakteristinės funkcijos $f_{Z_n}(t)$ ir jos išvestinių įverčius. Šiuo tikslu remsimės bet kokio atsitiktinio dydžio ξ charakteristinės funkcijos $f_\xi(t) := \mathbf{E} \exp\{it\xi\}$ įverčių bendrosiomis lemomis, kurias įrodė V.Statulevičius [66].

3.2 Charakteristinių funkcijų įverčiai

Suformuluosime lemas at. dydžio Z_n charakteristinių funkcijų įverčiams gauti. Tegul at.d. ξ, su $\mathbf{E}\xi = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi < \infty$ ir pasiskirstymo funkcija $F_\xi(x)$, egzistuoja tankis $p_\xi(x)$. Tegul $p_{\tilde{\xi}}(x)$ simetrizuoto at.d. $\tilde{\xi} = \xi - \xi^{'}$, kur $\xi^{'}$ at.d., nepriklausomas su at.d. ξ ir turintis tą patį skirstinį kaip ir at.d. ξ.

Nesunku įsitikinti, kad

$$F_{\tilde{\xi}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x+y)dF_\xi(x), \qquad f_{\tilde{\xi}}(t) = |f_\xi(t)|^2.$$

Pažymėkime

$$l_n(N_n) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|\le N_n} x^2 p_{\tilde{\xi}_j^{(n)}}(x)dx, \qquad N_n > 0. \tag{3.32}$$

L E M A 5. *Jei at.d.* $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots$, *su* $\mathbf{E}(\xi_j^{(n)})^4 < \infty$, *ir* $l = \underline{\lim}_{n\to\infty} l_n(N_n) > 0$, *tai at.d.* Z_n *ch.f.* $f_{Z_n}(t)$, *apibrėžtai lygybe* (3.17), *galioja įvertis*

$$|f_{Z_n}(t)| \le \exp\left\{-\frac{l}{\pi^2}t^2\right\}, \qquad |t| \le \frac{\pi B_n}{N_n}. \tag{3.33}$$

ĮRODYMAS. Turime, kad

$$|f_{\xi_j^{(n)}}(t)| \le \exp\{-I_j(t/2\pi)\}, \tag{3.34}$$

kur

$$I_j(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - |f_{\xi_j^{(n)}}(2\pi t)|^2\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\pi t x) p_{\tilde{\xi}_j^{(n)}}(x)dx. \tag{3.35}$$

Iš čia gauname, kad

$$|f_{S_n}(t)| \le \exp\{-I_n(t/2\pi)\}, \tag{3.36}$$

kur

$$I_n(t) := \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\pi t x) p_{\tilde{\xi}_j^{(n)}}(x) dx. \tag{3.37}$$

Pastebėję, kad $|\sin \pi\alpha| \geq 2(\alpha)$, kur (α) žymi atstumą nuo skaičiaus α iki artimiausio sveikojo skaičiaus, gauname

$$I_n(t) \geq 4t^2 \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| \leq 1/2|t|} x^2 p_{\tilde{\xi}_j^{(n)}}(x) dx = 4t^2 B_n^2 l_n\left(\frac{1}{2|t|}\right). \tag{3.38}$$

Prisiminę, kad

$$l = \underline{\lim}_{n\to\infty} l_n(N_n) > 0,$$

gauname

$$|f_{S_n}(t)| \leq \exp\left\{-\frac{l}{\pi^2} t^2 B_n^2\right\}, \qquad |t| \leq \frac{\pi}{N_n}, \tag{3.39}$$

arba

$$|f_{Z_n}(t)| \leq \exp\left\{-\frac{l}{\pi^2} t^2\right\}, \qquad |t| \leq \frac{\pi B_n}{N_n}. \tag{3.40}$$

Remdamiesi funkcijos $l_n(N_n)$ apibrėžimu (3.32), turime

$$l_n(N_n) \geq 2(1 - 2B_n^2 L_{4,n}/N_n^2). \tag{3.41}$$

Tarkime, kad $N_n = 2B_n L_{4,n}^{1/2}$, tai $l_n(N_n) \geq 1$. Iš to išplaukia, kad

$$|f_{Z_n}(t)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{\pi^2} t^2\right\}, \qquad |t| \leq (\pi/2) L_{4,n}^{-1/2}. \tag{3.42}$$

L E M A 6. *Jei at.d.* $\xi_j^{(n)}$, *su* $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ *ir* ${\sigma_j^{(n)}}^2 = \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^2 > 0$, $j = 1, 2, \dots$ *, egzistuoja tankis* $p_{\xi_j^{(n)}}(x)$, *kuris tenkina sąlygą* $(\mathbf{D})$, *tai funkcijai* $f_{Z_n}(t)$ *galioja įvertis*

$$|f_{Z_n}(t)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{3} M_n\right\}, \qquad |t| \geq \frac{\pi B_n}{N_n}, \tag{3.43}$$

kur

$$M_n \geq \frac{1}{256} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{({\sigma_k^{(n)}}^2 + N_n^2){C_k^{(n)}}^2}. \tag{3.44}$$

Kadangi $|\sin \pi\alpha| \geq 2(\alpha)$ tai, remdamiesi įverčiu (3.38), gauname

$$I_n(t) \geq 4J_n(t), \tag{3.45}$$

kur

$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} (xt)^2 p_{\tilde{\xi}_k^{(n)}}(x)dx. \tag{3.46}$$

L E M A 7. *Tegul bet kokiam $n \geq 1$ ir $N_n > 0$ egzistuoja toks intervalo $(-\infty, \infty)$ suskaidymas*

$$\ldots < t_{-1}^{(n)} < t_0^{(n)} = 0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots,$$

tenkinantis sąlygą

$$\frac{1}{6N_n} \leq t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \leq \frac{1}{4N_n}, \tag{3.47}$$

kad

$$J_n(t) \geq \frac{1}{2} l_n(N_n) \Big(t - t_{k0}^{(n)}\Big)^2 B_n^2, \tag{3.48}$$

jei $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$, kur pasirinktajam n, atsižvelgiant į t, $t_{k0}^{(n)}$ lygus $t_k^{(n)}$ arba $t_{k+1}^{(n)}$.

L E M A 8. *Tegul neneigiamoji funkcija $g(t)$, apibrėžta intervale $[a, \infty)$, tenkina Lipšico sąlygą*

$$|g(t+s) - g(t)| \leq K|s|. \tag{3.49}$$

Be to, tegul

$$V := \int_a^{\infty} g(t)dt < \infty. \tag{3.50}$$

Tada bet kokiam ε ir bet kokiam intervalo $[a,\infty)$ suskaidymui

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \dots ,$$

su $\max_{0\le k<\infty}(t_{k+1}-t_k) \le \varepsilon$*, teisinga nelygybė*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\max_{t_k\le t\le t_{k+1}} g^2(t)\Big)\Delta t_k \le V\Big(2K\varepsilon + 4\sup_{a\le t<\infty} g(t)\Big), \tag{3.51}$$

kur $\Delta t_k = t_{k+1}-t_k$*.*

3.3 Teoremų įrodymai

3.3.1 4 teoremos įrodymas

Reikia rasti 2 teiginio liekamojo nario $R_{n,\gamma}$, kai tenkinama sąlyga $(\mathbf{B}_\gamma)$ su $\gamma=0$, įvertį, t.y. reikia įvertinti integralą

$$R_{n,0} = \int_{T_{n,0}}^{T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|\frac{dt}{t}, \tag{3.52}$$

kur $f_{Z_n(h)}(t)$ atsitiktinio dydžio Z_n charakteristinė funkcija ir dydis $T_{n,0}$ atitinkamai apibrėžti formulėmis (3.17) ir (3.26). Pažymėję $\eta_j^{(n)} = \xi_j^{(n)}/B_n$ ir pastebėję, kad $\Gamma_k(\eta_j^{(n)}) = \Gamma_k(\xi_j^{(n)})/B_n^k$, randame

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta_j^{(n)}}(z) \;&:=\; \mathbf{E}\exp\{z\eta_j^{(n)}\} = \varphi_{\xi_j^{(n)}}(z/B_n) = \exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\Gamma_k(\xi_j^{(n)})(z/B_n)^k\right\} \\ &=\; \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_j^{(n)2}(|z|/B_n)^2(1+\theta(1/4))\right\}, \qquad |z|\le \Delta_n/9. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Todėl

$$\exp\left\{\frac{3}{8}\sigma_j^{(n)2}|z|^2\right\} \le \left|\varphi_{\xi_j^{(n)}}(z)\right| \le \exp\left\{\frac{5}{8}\sigma_j^{(n)2}|z|^2\right\} \tag{3.54}$$

su visais $|z| \le A_n$, $A_n = \Delta_n/(9B_n)$, kur Δ_n ir B_n apibrėžti atitinkamai lygybėmis (3.7) ir (3.1).

Tegul at.d. $\xi_j^{(n)}(h)$, $j = 1, 2, \dots, n$, yra atsitiktinio dydžio $\xi_j^{(n)}$ sujungtinis su tankio funkcija

$$p_{\xi_j^{(n)}(h)}(y) = e^{hy} p_{\xi_j^{(n)}}(y) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} p_{\xi_j^{(n)}}(y) dy. \tag{3.55}$$

Tada

$$m_j^{(n)}(h) = \mathbf{E}\xi_j^{(n)}(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \Gamma_k(\xi_j^{(n)}) h^{k-1}, \tag{3.56}$$

$$\sigma_j^{(n)2}(h) = \mathbf{D}\xi_j^{(n)}(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \Gamma_k(\xi_j^{(n)}) h^{k-2}, \tag{3.57}$$

ir at.d. $\xi_j^{(n)}(h)$, $k - tosios$ eilės kumulantas

$$\Gamma_k\Big(\xi_j^{(n)}(h)\Big) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{(l-k)!} \Gamma_l(\xi_j^{(n)}) h^{l-k}. \tag{3.58}$$

Žymėsime:

$$\begin{aligned} &S_n(h) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}(h), \qquad B_n^2(h) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{(n)2}(h), \\ &M_n(h) = \mathbf{E}S_n(h) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\xi_j^{(n)}(h), \qquad Z_n(h) = \frac{S_n(h) - M_n(h)}{B_n(h)}, \\ &L_{k,n}(h) = B_n^{-k}(h) \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j^{(n)}(h) - m_j(h)|^k. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Dydis $h = h(x)$ yra lygties

$$x = M_n(h)/B_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \Gamma_k(S_n) h^{k-1} \tag{3.60}$$

sprendinys. Jei lygtyje (3.32) vietoj at.d. $\xi_j^{(n)}$ įrašysime jo sujungtinį atsitiktinį dydį, tuomet gausime, kad

$$l_n(N_n(h)) \ge 2(1 - 2B_n^2(h) L_{4,n}(h)/N_n^2(h)). \tag{3.61}$$

Iš lygybės

$$\mathbf{E}(\xi_j^{(n)}(h) - m_j(h))^4 = \Gamma_4(\xi_j^{(n)}(h)) + 3\sigma_j^{(n)4}(h),$$

randame Liapunovo trupmenos įvertį

$$L_{4,n}(h) \leq \Gamma_4(S_n(h)/B_n^4(h) + 3 \max_{1\leq j\leq n} {\sigma_j^{(n)}}^2(h)/B_n^2(h). \tag{3.62}$$

Atsižvelgdami, kad at.d. $\xi_j^{(n)}$ tenkina sąlygą $(\mathbf{B}_\gamma)$ su $\gamma = 0$, remiantis nelygybe (3.5), gauname

$$\left|\Gamma_k(\xi_j^{(n)})\right| \leq k! K_n^{k-2} {\sigma_j^{(n)}}^2, \qquad k = 3, 4, \ldots, \tag{3.63}$$

kur

$$K_n = 2 \max_{1\leq j\leq n} \{K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)}\}.$$

Iš čia

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leq k!/\Delta_n^{k-2}, \qquad \Delta_n = B_n/K_n, \qquad k = 3, 4, \ldots. \tag{3.64}$$

Remdamiesi nelygybe (3.63) ir lygtimi (3.57), kai $0 \leq h \leq \Delta_n/(12B_n)$, turime

$${\sigma_j^{(n)}}^2(h) = {\sigma_j^{(n)}}^2\left(1 + \theta \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{hB_n}{\Delta_n}\right)^{k-2}\right) = {\sigma_j^{(n)}}^2\left(1 + \theta \frac{5}{8}\right). \tag{3.65}$$

Toliau, remdamiesi at.d. $\xi_j^{(n)}(h)$, $k - tosios$ eilės kumulianto apibrėžimu (3.58), gauname

$$\begin{aligned}\Gamma_4(S_n(h)) \quad &= \quad \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{(k-4)!}\Gamma_k(S_n)h^{k-4} \leq (3.5K_nB_n)^2 \\ &\times \quad \sum_{k=4}^{\infty}(k-2)(k-3)(3.5hK_n)^{k-4} \leq 81(3.5K_nB_n)^2.\end{aligned}$$

Taigi $\Gamma_4(S_n(h))/B_n^4(h) \leq 18.2(B_n/\Delta_n)^2/B_n^2(h)$. Pasinaudoję Liapunovo trupmenos įverčiu (3.62), randame

$$L_{4,n}(h)B_n^2(h) \leq 18.5(B_n/\Delta_n)^2. \tag{3.66}$$

Tarkime, kad $N_n(h) = 6.2(B_n/\Delta_n)$. Tuomet, remdamiesi nelygybe (3.61), gauname $l_n(N_n(h)) \geq 1$. Dabar, remdamiesi 5 lema, p.40, randame at.d. $Z_n(h)$ ch.f. $f_{Z_n(h)}(t)$ įvertį

$$|f_{Z_n(h)}(t)| \leq \exp\bigg\{ -\frac{1}{\pi^2}t^2\bigg\}, \tag{3.67}$$

visiems $|t| \leq \tau_n^{(0)}$, kur $\tau_n^{(0)} = \pi B_n(h)\Delta_n/(6.2B_n)$.

Asimptotinio skleidinio liekamąjį narį $R_{n,0}$, apibrėžtą formule (3.52), suskaidysime į du integralus

$$R_{n,0} = I_1^{(0)} + I_2^{(0)},$$

čia

$$I_1^{(0)} = \int_{T_{n,0}}^{\tau_n^{(0)}} \Big|f_{Z_n(h)}(t)\Big|\frac{dt}{t}, \qquad I_2^{(0)} = \int_{\tau_n^{(0)}}^{T_n} \Big|f_{Z_n(h)}(t)\Big|\frac{dt}{t}, \tag{3.68}$$

kur $T_{n,0}$ apibrėžtas lygybe (3.26) ir $T_n = C(l)\Delta_n^{l-2}$. Dabar, pasinaudoję įverčiu (3.67), gauname

$$\begin{aligned} I_1^{(0)} &= \int_{T_{n,0}}^{\tau_n^{(0)}} \Big|f_{Z_n(h)}(t)\Big|\frac{dt}{t} \leq \int_{T_{n,0}}^{\tau_n^{(n)}} \exp\bigg\{ -\frac{1}{\pi^2}t^2\bigg\}\frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{\pi^2}{2T_{n,0}^2}\exp\bigg\{ -\frac{1}{\pi^2}T_{n,0}^2\bigg\}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Nesunku įsitikinti, kad

$$I_2^{(0)} := \int_{\tau_n^{(0)}}^{T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|\frac{dt}{t} \leq \frac{12.4}{\pi\Delta_n}\int_{\tau_n^{(0)}}^{T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|dt. \tag{3.70}$$

Dabar, remiantis $5-8$ lemomis, p.$40-42$, randame integralo

$$I_2^{(0)} := \int_{\tau_n^{(0)}}^{T_n} \Big|f_{Z_n(h)}(t)\Big|dt \leq 684e^4\pi\sqrt{2\pi}K_n \tag{3.71}$$

$$\times \max_{1\leq r_i\leq n}\prod_{i=1}^{4} {C_{r_i}}^{(n)1/4}\exp\bigg\{ -\frac{c_3}{K_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{C_k^{(n)}}^2}\bigg\}, \qquad c_3 > 0. \tag{3.72}$$

Detalesnį įrodymą galima rasti p. $62-63$. Pagaliau, remdamiesi (3.60) ir (3.64), gauname

$$\begin{aligned} x &= B_nh\Big(1 + \theta\sum_{k=3}^{\infty}k(B_nh/\Delta)^{k-2}\Big) \\ &= B_nh(1 + \theta(3B_nh/\Delta))(1 - 3B_nh/\Delta_n)^{-1} \end{aligned} \tag{3.73}$$

visiems $0 \le h < \Delta_n/(3B_n)$.

Dabar, prisiminę asimptotinį skleidinį (3.21), bei pasirėmę lygybėmis (3.52), (3.68) ir įverčiais (3.69), (3.70) ir (3.71), gauname liekamojo nario $R_{n,0}$ įvertį

$$\begin{aligned} R_{n,0} &= \int_{T_{n,0}}^{T_n} \left| f_{Z_n(h)}(t) \right| \frac{dt}{t} \le \frac{\pi^2}{2T_{n,0}^2} \exp\left\{ -\frac{1}{\pi^2} T_{n,0}^2 \right\} \\ &+ (C_1 K_n/\Delta_n) \max_{1 \le r_i \le n} \prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{(n)\,1/4} \exp\left\{ -\frac{c_3}{K_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k^{(n)\,2}} \right\}, \end{aligned} \tag{3.74}$$

kai $0 \le x < \Delta_{n,0}$, kur $\Delta_{n,0} = c_0 \Delta_n$, $c_0 = (1/6)(\sqrt{2}/6)$, c_3 apibrėžtas lygybe (3.118). Čia

$$T_{n,0} = (1/8)(1 - x/\Delta_{n,0})\Delta_{n,0}, \qquad C_1 = 12.4 \cdot 684 e^4 \sqrt{2\pi}. \tag{3.75}$$

■

3.3.2 5 teoremos įrodymas

Norint įrodyti 5 teoremą, reikia įvertinti 2 teiginio, liekamąjį narį $R_{n,\gamma}$, kai $\gamma > 0$, t.y. rasti integralo

$$R_{n,\gamma} = \int_{T_{n,\gamma}}^{T_n} \left| f_{n,\gamma}^*(t) \right| \frac{dt}{t} \tag{3.76}$$

įvertį, kur

$$f_{n,\gamma}^*(t) = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!} \left(\frac{3x}{2} \right)^k \left| f_{Z_n}^{(k)}(t) \right|, \tag{3.77}$$

ir $f_{Z_n}^{(k)}(t)$ at.d. Z_n ch.f. k - toji išvestinė. Turime, kad

$$f_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k^{(n)}}(t/B_n). \tag{3.78}$$

Pažymėkime:

$$f_{Z_n,k_1}(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne k_1}}^{n} f_{\xi_k^{(n)}}(t/B_n),$$

$$f_{Z_n,k_1,k_2}(t) = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq k_1\neq k_2}}^{n} f_{\xi_k^{(n)}}(t/B_n), \tag{3.79}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_{Z_n,k_1,k_2,\dots,k_l}(t) = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq k_1\neq\dots\neq k_l}}^{n} f_{\xi_k^{(n)}}(t/B_n).$$

Darbe [45] įrodyta, kad

$$\begin{aligned} f_{Z_n}^{(l)}(t) &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{m_{1j}+\dots+m_{jj}=l\\ m_{\nu i}>0, \nu=\overline{1,j}}} A_{m_{1j},\dots,m_{jj}}(l) \sum_{k_1=1}^{n} f_{\xi_{k_1}^{(n)}}^{(m_{1j})}(t/B_n) \\ &\times \sum_{\substack{k_2=1\\ k_2\neq k_1}}^{n} f_{\xi_{k_2}^{(n)}}^{(m_{2j})}(t/B_n)\dots \sum_{\substack{k_j=1\\ k_j\neq k_1\neq\dots\neq k_{l-1}}}^{n} f_{\xi_{k_j}^{(n)}}^{(m_{jj})}(t/B_n) f_{Z_n,k_1,\dots,k_j}(t), \end{aligned} \tag{3.80}$$

kur $A_{m_{1j},\dots,m_{jj}}(l)$ priklauso tik nuo l. Prisiminę, kad $\mathbf{E}\xi_k^{(n)} = 0$, ir

$$\begin{aligned} f_{\xi_k^{(n)}}^{(1)}(t/B_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ix}{B_n} \exp\left\{\frac{itx}{B_n}\right\} dF_{\xi_k^{(n)}}(x) \\ &= -\frac{t}{B_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left\{\theta \frac{itx}{B_n}\right\} dF_{\xi_k^{(n)}}(x), \end{aligned}$$

randame

$$\sum_{k_1=1}^{n} |f_{\xi_{k_1}^{(n)}}^{(1)}(t/B_n)| \leq |t|. \tag{3.81}$$

Nesunku įsitikinti, kad

$$|f_{\xi_k^{(n)}}^{(\nu)}(t/B_n)| \leq \mathbf{E}|\xi_k^{(n)}|^{\nu}/B_n^{\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \dots, s. \tag{3.82}$$

Vadinasi,

$$\sum_{k=1}^{n} |f_{\xi_k^{(n)}}^{(\nu)}(t/B_n)| \leq L_{\nu,n}, \qquad \nu = 1, \dots, s, \tag{3.83}$$

kur $L_{\nu,n}$ apibrėžtas formule (3.3). Lygybės (3.77) - (3.82) leidžia tvirtinti, kad

$$|f_{Z_n}^{(1)}(t)| \leq (|t| \wedge L_{1,n}) \max_{1\leq k_1\leq n} |f_{Z_n,k_1}(t)|, \tag{3.84}$$

$$
\begin{aligned}
|f^{(2)}_{Z_n}(t)| &\le (1+(t^2\wedge L^2_{1,n}))\max_{1\le k_1\ne k_2\le n}|f_{Z_n,k_1,k_2}(t)|, && (3.85)\\
|f^{(l)}_{Z_n}(t)| &\le c(l)(1+(|t|^l\wedge L^l_{1,n})+L_{l,n}) && (3.86)\\
&\times \max_{1\le k_1\ne\ldots\ne k_l\le n}|f_{Z_n,k_1,\ldots,k_l}(t)|, \qquad l=3,4,\ldots.
\end{aligned}
$$

Kadangi $f_{Z_n}(2\pi B_n t) = f_{S_n}(2\pi t)$, tai remiantis įverčiu (3.36) iš 5 lemos, p.40 ir remdamiesi nelygybe

$$
|f_{S_n}(t)|\le\Big\{-\sum_{k=1}^n I_k(t)\Big\},
$$

kur $I_k(t)$ apibrėžtas lygybe (3.35), randame

$$
\begin{aligned}
&\max_{1\le k_1\ne\ldots\ne k_l\le n}|f_{Z_n,k_1,k_2\ldots,k_l}(2\pi B_n t)|\\
&\le \exp\Big\{-\min_{1\le k_1\ne\ldots\ne k_l\le n}\sum_{\substack{k=1\\ k\ne k_1\ne\ldots\ne k_l}}^n I_k(t)\Big\}\\
&= \exp\Big\{-I_n(t)+\max_{1\le k_1\ne\ldots\ne k_l\le n}(I_{k_1}(t)+\ldots+I_{k_l}(t))\Big\} && (3.87)\\
&\le \exp\{l/2\}\exp\{-I_n(t)\},
\end{aligned}
$$

kur $I_n(t)$ apibrėžtas formule (3.37). Dabar, remdamiesi 7 lema p.42 ir nelygybe (3.86), visiems $|t|\le\tau_n$, $\tau_n=(\pi/2)L^{-1/2}_{4,n}$, gauname

$$
|f^{(l)}_{Z_n}(t)|\le c_1(l)\Big(1+(|t|^l\wedge L^l_{1,n})+L_{l,n}\Big)\exp\Big\{-\frac{1}{\pi^2}t^2\Big\}, \qquad (3.88)
$$

$l=3,4,\ldots$ ir $c_1(l)=c(l)\exp\{l/2\}$.

Partodami $\Delta_{n,\gamma}$ ir s apibrėžimus (3.18) ir (2.5), gauname nelygybę

$$
(l!)^{1+\gamma}\Delta_n^{2-l}\le(l-2)!(3.8\Delta_{n,\gamma})^{2-l}, \qquad l=3,4,\ldots,s+2. \qquad (3.89)
$$

Dabar, kai tenkinama sąlyga $(\mathbf{B}_\gamma)$, visiems $l=2m$, $m=2,3,\ldots,(s+2)/2$, turime

$$
\begin{aligned}
L_{l,n} &:= B_n^{-l}\sum_{j=1}^n\mathbf{E}|\xi_j^{(n)}|^l\le(l!)^{1+\gamma}/(B_n/K)^{l-2}\\
&\le (l!)^{1+\gamma}/\Delta_n^{l-2}\le(l-2)!/(3.8\Delta_{n,\gamma})^{l-2}. && (3.90)
\end{aligned}
$$

Norėdami gauti $l-tosios$ eilės Liapunovo trupmenos $L_{l,n}$ įvertį su $l = 2m+1$, $m = 1, 2, \dots, s/2$, iš jau žinomos nelygybės (3.4) randame

$$L_{l,n} \leq L_{l+1,n}^{(l-2)/(l-1)} \leq \frac{((l-1)!)^{(l-2)/(l-1)}}{(3.8\Delta_{n,\gamma})^{l-2}}, \tag{3.91}$$

visiems $l = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots, s/2$.

Toliau, tegul $T_n := C(l)\Delta_n^{l-2}$, kur $C(l)$ yra dydis, priklausantis tik nuo l, Δ_n apibrėžtas formule (3.7).

Dabar integralą $R_{n,\gamma}$ suskaidome į du:

$$R_{n,\gamma} = \int_{T_{n,\gamma}}^{T_n} |f_{n,\gamma}^*(t)| \frac{dt}{t} = I_1 + I_2, \tag{3.92}$$

kur

$$I_1 = \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!} \left(\frac{3x}{2}\right)^l \int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} |f_{Z_n}^{(l)}(t)| \frac{dt}{t}, \tag{3.93}$$

$$I_2 = \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!} \left(\frac{3x}{2}\right)^l \int_{\tau_n}^{T_n} |f_{Z_n}^{(l)}(t)| \frac{dt}{t}, \tag{3.94}$$

Čia $\tau_n = (\pi/2)L_{4,n}^{-1/2}$.

Taikydami nelygybes (3.42) ir (3.87) rasime integralo

$$I_1 = I_1^{(0)} + I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)} \tag{3.95}$$

įverčius

$$\begin{aligned} I_1^{(0)} &:= \int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} |f_{Z_n}(t)| \frac{dt}{t} \leq \int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} \exp\left\{-\frac{1}{\pi^2}t^2\right\} \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{\pi^2}{2T_{n,\gamma}} \exp\left\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\right\}; \end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= \frac{3x}{2} \int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} |f_{Z_n}^{(1)}(t)| \frac{dt}{t} \leq \frac{3\sqrt{e}x}{2} \int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} (t \wedge L_{1,n}) \exp\left\{-\frac{1}{\pi^2}t^2\right\} \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{3\sqrt{e}\pi^2 x}{4T_{n,\gamma}} \exp\left\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\right\}; \end{aligned} \tag{3.97}$$

$$
\begin{aligned}
I_1^{(2)} &= \frac{1}{2}\bigg(\frac{3x}{2}\bigg)^2 \int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} |f_{Z_n}^{(2)}(t)|\frac{dt}{t} \\
&\le \frac{9ex^2}{8}\int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} (1+(t^2\wedge L_{1,n}^2))\exp\bigg\{-\frac{1}{\pi^2}t^2\bigg\}\frac{dt}{t} \\
&\le \frac{9e(\pi x)^2}{16}\bigg(1+\frac{6}{T_{n,\gamma}^2}\bigg)\exp\bigg\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\bigg\}; \qquad (3.98)\\
I_1^{(3)} &= \sum_{l=3}^{s}\frac{1}{l!}\bigg(\frac{3x}{2}\bigg)^l \int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} |f_{Z_n}^{(l)}(t)|\frac{dt}{t} \\
&\le \sum_{l=3}^{s}\frac{1}{l!}\bigg(\frac{3x}{2}\bigg)^l c_1(l)\int_{T_{n,\gamma}}^{\tau_n} (1+(|t|^l\wedge L_{1,n}^l)+L_{l,n})\exp\bigg\{-\frac{1}{\pi^2}t^2\bigg\}\frac{dt}{t} \\
&\le \frac{\pi^2}{2T_{n,\gamma}}\sum_{l=3}^{s}\frac{1}{l!}\bigg(\frac{3\sqrt{e}x}{4}\bigg)^l\bigg\{1+\bigg(L_{1,n}^l\wedge\bigg(T_{n,\gamma}^l+\Big(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big)^l\bigg)\bigg) \qquad (3.99)\\
&+ (l-1)!/(3.8\Delta_{n,\gamma})^{l-2}\bigg\}\exp\bigg\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\bigg\} \\
&\le \frac{\pi^2}{2T_{n,\gamma}}\exp\bigg\{-\frac{1}{16\pi^2}T_{n,\gamma}^2\bigg\}+\frac{1}{48\pi^2}\exp\bigg\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\bigg\},
\end{aligned}
$$

su visais $1\le x\le (5/(8\pi^2\sqrt{e}\pi^2))T_{n,\gamma}$. Remdamiesi įverčiais (3.95) - (3.98), gauname

$$
I_1 \le \frac{\pi^2}{T_{n,\gamma}}\exp\bigg\{-\frac{1}{16\pi^2}T_{n,\gamma}^2\bigg\}+\frac{5\pi^2x^2}{8}T_{n,\gamma}\exp\bigg\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\bigg\}. \qquad (3.100)
$$

Norėdami įvertinti integralą I_2, kuris apibrėžtas lygybe (3.94), pažymėkime

$$
\tilde{I}_2 = \int_{\tau_n}^{T_n} |f_{Z_n,k_1,\ldots,k_j}(t)|\frac{dt}{t}, \qquad j\le l, \qquad l=0,1,\ldots,s. \qquad (3.101)
$$

Toliau, tegul $T_n^* = T_n/(2\pi B_n) = C(l)\Delta_n/(2\pi B_n)$, kur Δ_n apibrėžtas lygybe (3.7). Taigi, iš lygybių (3.78) ir $I_j(t)$ išraiškos (3.35) gauname

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &\le \int_{1/(2N_n)}^{T_n^*}\prod_{r=1}^{4}{}''|f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)|\prod_{i=1}^{n-j-4}{}'|f_{\xi_{l_i}^{(n)}}(2\pi t)|\frac{dt}{t} \\
&\le \int_{1/(2N_n)}^{T_n^*}\exp\Big\{-[I_n(t)-(I_{k_1}(t)+\ldots+I_{k_j}(t)) \\
&+ I_{r_1}+\ldots+I_{r_4}]\Big\}\prod_{r=1}^{4}{}''|f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)|\frac{dt}{t} \qquad (3.102)\\
&\le \exp\bigg\{\frac{j+4}{2}\bigg\}\int_{1/(2N_n)}^{T_n^*}\exp\{-I_n(t)\}\prod_{r=1}^{4}{}''|f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)|\frac{dt}{t},
\end{aligned}
$$

kur $N_n = 2B_nL_{4,n}^{1/2}$ ir $\prod''$ sandauga visų r_i, kurie nesutampa su $k_1, k_2, \dots, k_j$; $\prod'$ sandauga visų indeksų l_i, kurie nesutampa nei su $k_1, k_2, \dots, k_j$, nei su r_1, r_2, r_3, r_4.

Išskaidę $I_n(t)$ į dvi dalis $I_n(t) = \frac{3}{4}I_n(t) + \frac{1}{4}I_n(t)$ ir $\frac{3}{4}I_n(t)$ įvertinę remdamiesi 6 lema p.41, o $\frac{1}{4}I_n(t)$ remdamiesi 7 lema p.42, galiausiai gausime

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2 &\leq 2N_n \exp\left\{\frac{j+4}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{4}M_n\right\}\\ &\times \sum_k \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t-t_{k0}^{(n)})^2B_n^2\right\}\prod_{i=1}^{4}{}''|f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)|\frac{dt}{t}\\ &\leq 4\sqrt{2\pi}L_{4,n}^{1/2}\exp\left\{\frac{j+4}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{4}M_n\right\}U_n,\end{aligned} \tag{3.103}$$

kur M_n apibrėžtas formule (3.44), o U_n, pagal Koši nelygybę

$$\begin{aligned}U_n &:= \sum_k \sup_{t_k^{(n)}\leq t\leq t_{k+1}^{(n)}} \prod_{i=1}^{4}{}''|f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)|\\ &\leq \prod_{i=1}^{4}{}''\left(\sum_k \sup_{t_k^{(n)}\leq t\leq t_{k+1}^{(n)}} |f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)|^4\right)^{1/4}.\end{aligned} \tag{3.104}$$

Tegul $g_{r_i}(t) := |f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)|^2$. Tada 8 lemos p.42 tvirtinimas teisingas su

$$V_{r_i}^{(n)} = p_{\tilde{\xi}_{r_i}^{(n)}}(0) \leq C_{r_i}^{(n)}, \qquad K_{r_i}^{(n)} \leq 2\sqrt{2}\pi\sigma_{r_i}^{(n)}.$$

Prisiminę, kad $1/(6N_n) \leq t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \leq 1/(4N_n)$, turime

$$U_n \leq 6N_n \prod_{i=1}^{4}{}'' C_{r_i}^{(n)\,1/4}\left(4 + \frac{\sqrt{2}\pi\sigma_{r_i}^{(n)}}{N_n}\right)^{1/4}. \tag{3.105}$$

Taigi, remdamiesi šiuo įverčiu ir lygybe (3.101), gauname

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2 &\leq 24\sqrt{2\pi}(N_n^2/B_n)\exp\left\{\frac{j+4}{2}\right\}\prod_{i=1}^{4}{}''C_{r_i}^{(n)\,1/4}\left(1+\frac{\pi\sigma_{r_i}^{(n)}}{2\sqrt{2}N_n}\right)^{1/4}\\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{4\cdot 256}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\sigma_k^{(n)2} + N_n^2)C_k^{(n)2}}\right\}.\end{aligned} \tag{3.106}$$

Pagaliau, remdamiesi lygybe (3.94) ir $\tilde{I}_2$ įverčiu (3.106), turime

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2 \quad &\leq \quad 24\pi\sqrt{2\pi}e^2(N_n^2/B_n) \max_{1\leq r_i\leq n} \prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{(n)\,1/4} \left(1 + \frac{\pi\sigma_{r_i}^{(n)}}{2\sqrt{2}N_n}\right)^{1/4} \\ &\times \quad \exp\left\{ - c_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left({\sigma_k^{(n)}}^2 + N_n^2\right){C_k^{(n)}}^2} \right\} \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!} \left(\frac{3\sqrt{e}x}{2}(1 + L_{1,n}^l + L_{l,n})\right).\end{aligned} \tag{3.107}$$

Toliau, pasinaudodami sąlyga $(\mathbf{B}_\gamma)$, randame

$$L_{4,n} := B_n^{-4} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^4 \leq 24^{1+\gamma}(K/B_n)^2 \leq 6 \cdot 24^\gamma (K_n/B_n)^2, \tag{3.108}$$

kur $K_n = 2\max_{1\leq j\leq n}(K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)})$. Tada, remdamiesi $l_n(N_n)$ apibrėžimu (3.32), randame

$$l_n(N_n) \geq 2(1 - 2B_n^2 L_{4,n}/N_n^2) \geq 2(1 - 12 \cdot 24^\gamma (K_n/N_n)^2). \tag{3.109}$$

Turime, kad $l_n(N_n) \geq 1$, tuomet tarę, kad $N_n = 24^{(1+\gamma)/2}K_n$, gauname

$$\exp\left\{ - c_1 \sum_{k=1}^{n} \left(({\sigma_k^{(n)}}^2 + N_n^2){C_k^{(n)}}^2\right)^{-1} \right\} \leq \exp\left\{ - \frac{d}{K_n^2} \sum_{k=1}^{n} {C_k^{(n)}}^{-2} \right\}, \tag{3.110}$$

kur

$$d = 1/(4 \cdot 256). \tag{3.111}$$

Taigi iš nelygybių (3.106) ir (3.107) gauname

$$\begin{aligned}I_2 \quad &\leq \quad 96\sqrt{2\pi}e^2 24^\gamma (K_n/\Delta_n) \max_{1\leq r_i\leq n} \prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{(n)\,1/4} \\ &\times \quad \exp\left\{ - \frac{d}{K_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{{C_k^{(n)}}^{-2}} \right\} \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!} \left(\frac{3\sqrt{e}x}{2}\right)^l (1 + L_{1,n}^l + L_{l,n}).\end{aligned} \tag{3.112}$$

Toliau nesunku įsitikinti, kad su visais $0 \leq x < \Delta_{n,\gamma}$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!} \left(\frac{3\sqrt{e}x(1 \vee L_{1,n})}{2}\right)^l \exp\left\{ - \frac{c_2}{K_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{{C_k^{(n)}}^2} \right\} \\ &\leq \exp\left\{ - \frac{c_2}{2K_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{{C_k^{(n)}}^2} \right\},\end{aligned} \tag{3.113}$$

jei tenkinama sąlyga

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{K_n^2}\sum_{k=1}^{n} C_k^{(n)^{-2}}}{(1\vee L_{1,n})\Delta_{n,\gamma}} \geq d, \tag{3.114}$$

kur d apibrėžtas lygybe (3.111). Turėdami $l-tosios$ eilės Liapunovo trupmenos įverčius (3.90) ir (3.91) gauname

$$\sum_{l=3}^{s}\frac{1}{l!}\left(\frac{3\sqrt{e}x}{2}\right)^{l} L_{l,n} \leq \left(\frac{3\sqrt{e}x}{2}\right)^{2}\sum_{l=3}^{s}\frac{1}{l}\left(\frac{3\sqrt{e}x}{7.6\Delta_{n,\gamma}}\right)^{l-2} \leq 4x^2, \tag{3.115}$$

su visais $0\leq x<\Delta_{n,\gamma}$. Tokiu b$\overline{\text{u}}$du iš nelygybių (3.112)$-$ (3.115) turime, kad

$$I_2 \leq c_3 K_n \max_{1\leq r_i\leq n}\prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{(n)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{d}{2K_n^2}\sum_{k=1}^{n} C_k^{(n)^{-2}}\right\}, \tag{3.116}$$

kur $c(\gamma)\leq 192e^2\sqrt{2\pi}\cdot 24^{\gamma}$.

Pagaliau, remdamiesi lygybėmis (3.92) - (3.94) ir gautais įverčiais (3.100) ir (3.116), gauname tikimybės $\mathbf{P}(Z_n\geq x)=1-F_{Z_n}(x)$ asimptotinio skleidinio liekamojo nario $R_{n,\gamma}$, kai $\gamma>0$ įvertį

$$\begin{aligned} R_{n,\gamma} &\leq T_{n,\gamma}^2 \exp\left\{-\frac{1}{16\pi^2}T_{n,\gamma}^2\right\} + c_4(K_n/\Delta_n) \\ &\times \max_{1\leq r_i\leq n}\prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{1/4}\exp\left\{-\frac{c_3}{2}\frac{1}{K_n^2}\sum_{k=1}^{n} C_k^{(n)^{-2}}\right\}, \end{aligned} \tag{3.117}$$

kur $T_{n,\gamma}$ apibrėžtas lygybe (3.20) ir

$$c_3=(256(1+96\cdot 24^{\gamma}))^{-1}, \qquad c_4=192e^2\sqrt{2\pi}\cdot 24^{\gamma}. \tag{3.118}$$

$\blacksquare$

4 Skyrius

Atsitiktinių dydžių serijų schemoje sumos skirstinio tankio funkcijos asimptotiniai skleidiniai didžiųjų nuokrypių zonose

4.1 Pagrindiniai rezultatai

Skyrius skirtas nepriklausomų atsitiktinių dydžių (at.d.) $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots, n$ su vidurkiais $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$, ir dispersijomis ${\sigma_j^{(n)}}^2 = \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^2$ sumos serijų schemoje tankio funkcijos asimptotiniams skleidiniams gauti didžiųjų nuokrypių Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose.

Žymėsime

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}, \qquad B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} {\sigma_j^{(n)}}^2, \qquad Z_n = \frac{S_n}{B_n}, \tag{4.1}$$

$$F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}(Z_n < x), \qquad p_{Z_n}(x) = \frac{d}{dx} F_{Z_n}(x). \tag{4.2}$$

Rezultatus gausime remdamiesi didžiųjų nuokrypių 3 lema p.29, panaudoję kumuliantų metodą ir charakteristinių funkcijų įverčius. Šiame skyriuje gauti rezultatai yra išspausdinti straipsniuose:

1. Deltuvienė D. Atsitiktinių dydžių sumos serijų schemoje tankio funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių Kramerio zonoje, Lietuvos matematikos rinkinys, T. **41**, spec.nr.41, Vilnius, MII: 2001, p. 620-625;

2. Deltuvienė D., Saulis L. Asymptotic Expansions of the Distribution Density in the Large Deviations Zones for Sums of Independent Random Variables in the Series Scheme, Acta Applicandae Mathematicae T. **78**, Dortrecht, Kluwer Academic Publishers B.V., 2003, p. 87-97.

Norint pritaikyti didžiųjų nuokrypių 3 lemą, reikalingas at.d. Z_n, kuris apibrėžtas formule (4.1), $k - tosios$ eilės kumulianto $\Gamma_k(Z_n)$, $k = 3, 4, \dots$ įvertis, kai at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots,$ tenkina apibendrintą S.Bernšteino sąlygą $(\mathbf{B}_\gamma)$: *t.y. egzistuoja dydžiai* $\gamma \geq 0$ *ir* $K_j^{(n)} > 0$ *tokie, kad*

$$|\mathbf{E}(\xi_j^{(n)})^k| \leq (k!)^{1+\gamma} (K_j^{(n)})^{k-2} {\sigma_j^{(n)}}^2, \qquad k = 3, 4, \dots . \tag{$\mathbf{B}_\gamma$}$$

Kumulantų $\Gamma_k(Z_n)$ **įvertis** gautas 3 skyriuje, 1 teiginyje, p. 33.

Toliau visur reikalausime, kad $\Delta_n \to \infty$, kai $n \to \infty$, kur

$$\Delta_n = \frac{B_n}{K_n}, \qquad K_n := 2 \max_{1 \le j \le n} (K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)}). \tag{4.3}$$

Įrodant didžiųjų nuokrypių teoremas Kramerio zonoje, vartojami atsitiktiniai dydžiai $\xi_j^{(n)}(h)$, kurie yra sujungtiniai atsitiktiniams dydžiams $\xi_j^{(n)}$, su tankio funkcija

$$p_{\xi_j^{(n)}(h)}(y) = e^{hy} p_{\xi_j^{(n)}}(y) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} p_{\xi_j^{(n)}}(y) dy. \tag{4.4}$$

Tegul

$$S_n(h) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}(h), \qquad Z_n(h) = \frac{S_n(h) - M_n(h)}{B_n(h)}, \tag{4.5}$$

$$M_n(h) = \mathbf{E} S_n(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \Gamma_k(S_n) h^{k-1}, \tag{4.6}$$

$$B_n^2(h) = \mathbf{D} S_n(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \Gamma_k(S_n) h^{k-2}. \tag{4.7}$$

Dydis h randamas iš lygybės (3.60). Kadangi at.d. $\xi_j^{(n)}$ yra nepriklausomi, tai normuoto ir centruoto at.d. $Z_n(h)$ charakteristinė funkcija yra

$$f_{Z_n(h)}(t) = \mathbf{E} e^{itZ_n(h)} = \exp\left\{ -it \frac{M_n(h)}{B_n(h)} \right\} \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j^{(n)}(h)}(t/B_n(h)). \tag{4.8}$$

Tiriant at.d. Z_n skirstinio tankį $p_{Z_n}(x)$ didžiųjų nuokrypių zonose, svarbūs yra dydžiai:

$$\Delta_{n,\gamma} = c_\gamma \Delta_n^{1/(1+2\gamma)}, \qquad c_\gamma = 1/6(\sqrt{2}/6)^{1/(1+2\gamma)}, \tag{4.9}$$

$$T_{n,\gamma} = 3/8(1 - x/\Delta_{n,\gamma})\Delta_{n,\gamma}, \qquad 0 \le x < \Delta_{n,\gamma}. \tag{4.10}$$

Reikalausime, kad at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = \overline{1,n}$ egzistuotų tankis $p_{\xi_j^{(n)}}(x)$ ir

$$\sup_x p_{\xi_j^{(n)}}(x) \le C_j^{(n)} < \infty. \tag{$\mathbf{D}$}$$

Tuo atveju, kai at.d. $\xi_j^{(n)}$ tankis neegzistuoja, tariame, kad $C_j^{(n)} = \infty$.

T E I G I N Y S 3. *Tegul serijų seka* $\xi_j^{(n)}$ *su vidurkiais* $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ *ir dispersijomis* $\sigma_j^2 = \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^2 > 0$, $j = 1, 2, \dots$, *tenkina sąlygas* $(\mathbf{B}_\gamma)$ *ir* $(\mathbf{D})$, *tuomet kiekvienam sveikajam* l, $l \geq 1$ *intervale*

$$0 \leq x < \Delta_{n,\gamma}$$

galioja asimptotinis skleidinys

$$\frac{p_n(x)}{\varphi(x)} = \exp\{L_{m,n}(x)\}\left(1 + \sum_{\nu=0}^{l-1} M_{\nu,n}(x) + \theta_1(\gamma, l)\left(\frac{x+1}{\Delta_{n,\gamma}}\right)^l + R^*_{n,\gamma}\right) \tag{4.11}$$

su liekamuoju nariu

$$R^*_{n,\gamma} = \frac{2}{\pi}\int_{T_{n,\gamma}}^{\infty} |f^*_{n,\gamma}(t)| dt, \tag{4.12}$$

kur

$$f^*_{n,\gamma}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{s} \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}_{Z_n}(t), & \gamma > 0, \\ \\ f_{Z_n(h)}(t), & \gamma = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Čia

$$L_{m,n}(x) = \sum_{3 \leq k \leq m} \lambda_{k,n} x^k, \qquad m = \begin{cases} (1/\gamma) + l - 1, & \gamma > 0, \\ \\ \infty, & \gamma = 0, \end{cases}$$

kur koeficientai $\lambda_{k,n}$ *gaunami iš lygybės (2.8). Daugianariai* $M_{\nu,n}$ *randami iš formulių*

$$M_{\nu,n}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} K_{k,n}(x) q_{\nu-k,n}(x), \tag{4.14}$$

$$K_\nu(x) = \sum \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!}(-\lambda_{m+2} x^{m+2})^m, \qquad K_0(x) \equiv 1, \tag{4.15}$$

$$q_{\nu,n}(x) = \sum H_{\nu+2l,n}(x) \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!}(\Gamma_{m+2}(Z_n)/(m+2)!)^{k_m}, \tag{4.16}$$

$$q_0(x) \equiv 1$$

Čia sumuojama pagal visus sveikus ir neneigiamus lygties $k_1 + 2k_2 + \ldots + \nu k_\nu = \nu$ sprendinius ir $k_1 + \ldots + k_\nu = l$. ir $H_m(x)$ - Čebyševo - Ermito $m - tosios$ eilės polinomai

$$H_m(x) \;=\; (-1)^m \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^m}{dx^m} \varphi(x).$$

Atskiru atveju:

$$\begin{aligned}
M_{0,n}(x) &\equiv 0, \qquad M_{1,n}(x) = (-1/2)\Gamma_3(Z_n),\\
M_{2,n}(x) &= (1/8)\Big(5\Gamma_3^2(Z_n) - 2\Gamma_4(Z_n))x^2 + (1/24)\Big(3\Gamma_4(Z_n) - 5\Gamma_3^2(Z_n)\Big),\\
M_{3,n}(x) &= (1/24)\Big(34\Gamma_3(Z_n)\Gamma_4(Z_n) - 4\Gamma_5(Z_n) - 45\Gamma_3^3(Z_n)\Big)x^2\\
&+ (1/48)\Big(6\Gamma_5(Z_n) - 35\Gamma(Z_n)\Gamma(Z_n) + 35\Gamma(Z_n)\Big)x, \ldots.
\end{aligned}$$

Dydis $q(\gamma, l)$ apibrėžtas lygybe (2.22).

4.2 Asimptotinio skleidinio liekamojo nario įverčiai

Rasime asimptotinio skleidinio (4.11) liekamojo nario $R^*_{n,\gamma}$, apibrėžto lygybe (4.12) įverčius, kai $\gamma = 0$ (Kramerio) ir kai $\gamma > 0$ (Liniko) zonose.

T E O R E M A 8. *Tegul at.d.$\xi_j^{(n)}$ seka, su $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ ir ${\sigma_j^{(n)}}^2 = \mathbf{E}{\xi_j^{(n)}}^2 > 0$, $j = 1, 2, \ldots$ tenkina sąlygas $(\mathbf{B}_\gamma)$, kai $\gamma = 0$ ir $(\mathbf{D})$. Tada visiems x*

$$0 \le x < \Delta_{n,0} \qquad (Kramerio \qquad zonoje)$$

galioja asimptotinis skleidinys (4.11) su liekamojo nario įverčiu

$$\begin{aligned}
R_{n,0} &\le \frac{\pi^2}{2T_{n,0}^2} \exp\Big\{ - \frac{T_{n,0}^2}{\pi^2} \Big\} + \Big(\frac{C_1 K_n}{\Delta_{n,0}} \Big)\\
&\times \max_{1 \le j \le n} \prod_{i=1}^4 {C_{r_i}^{(n)}}^{1/4} \exp\Big\{ - \frac{c_2}{K_n^2} \sum_{j=1}^n 1/{C_k^{(n)}}^2 \Big\},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

c_2- teigiama konstanta.

T E O R E M A 9. *Tegul at.d.* $\xi_j^{(n)} = 0$ *su* $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ *ir* $\sigma_j^{(n)2} = \mathbf{E}\xi_j^{(n)2} > 0$, $j = 1, 2, \dots$ *tenkina sąlygas* $(\mathbf{D})$, $(\mathbf{B}_\gamma)$, *kai* $\gamma > 0$, *ir*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1 \vee L_{1,n})\Delta_{n,\gamma}} \frac{1}{K_n^2} \sum_{j=1}^{n} C_j^{(n)-2} \geq d > 0.$$

Tada su visais x,

$$0 \leq x < \Delta_{n,\gamma} \qquad (Liniko \qquad zonos)$$

galioja asimptotinis skleidinys (4.11) su liekamojo nario įverčiu

$$\begin{aligned} R_{n,\gamma} &\leq \frac{\pi^2}{T_{n,\gamma}} \exp\Big\{ -\frac{1}{16\pi^2} T_{n,\gamma}^2 \Big\} + \frac{5\pi^2 x^2}{8} T_{n,\gamma} \exp\Big\{ -\frac{1}{\pi^2} T_{n,\gamma}^2 \Big\} \\ &+ c_4(\gamma) K_n \max_{1\leq r_i \leq n} \prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{(n)1/4} \exp\Big\{ -\frac{c_3}{2K_n^2} \sum_{k=1}^{n} C_k^{(n)-2} \Big\}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

čia $T_{n,\gamma}$, K_n *apibrėžti lygybėmis* (4.10), (4.3) *ir* $c_3 = (256(1+96.24^\gamma))^{-1}$, $c_4(\gamma) = 192e^2\sqrt{2\pi}.24^\gamma$.

4.2.1 8 teoremos įrodymas

Turime, kad $\xi_j^{(n)}(h)$ yra sujungtinis at.d. atsitiktiniam dydžiui $\xi_j^{(n)}$, kurio tankio funkcija apibrėžta formule (4.4). Nesunku įsitikinti, kad

$$\mathbf{E}\xi_j^{(n)}(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \Gamma_k(\xi_j^{(n)}) h^{k-1}, \tag{4.19}$$

$$\sigma_j^{(n)2}(h) = \mathbf{D}\xi_j^{(n)}(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \Gamma_k(\xi_j^{(n)}) h^{k-2}, \tag{4.20}$$

ir $k - tosios$ eilės kumuliantas

$$\Gamma_k(\xi_j^{(n)}(h)) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{(l-k)!} \Gamma_k(\xi_j^{(n)}) h^{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots. \tag{4.21}$$

Pasinaudojus 3 lema, p.29 bet kokiam at.d. ξ, 8 teoremos įrodymui reikia įvertinti integralą

$$I = \int_{|t|\geq \tau_{n,0}} |f_{Z_n(h)}(t)| dt, \tag{4.22}$$

kur

$$\tau_{n,0}=(1/12)(1-x/\Delta_{n,0})\Delta_{n,0},\qquad \Delta_{n,0}=c_0\Delta_n,\qquad c_0=(1/6)(\sqrt{2}/6),$$

čia Δ_n apibrėžtas lygybe (4.3).

Remiantis 6 lema, p.41, turime

$$\begin{aligned}
|f_{Z_n(h)}(t)| &\leq \exp\{-I_{h,n}(t/2\pi)\},\\
I_{h,n}(t/2\pi) &= \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2(\pi t x)p_{\tilde{\xi}_j^{(n)}}(x)dx \geq 4t^2\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|\leq 1/2|t|}x^2 p_{\tilde{\xi}_j^{(n)}(h)}(x)dx\\
&= 4t^2B_n^2(h)l_n(1/2|t|), \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

kur

$$\begin{aligned}
l_n(N_n(h)) &= B_n^{-2}(h)\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF_{\tilde{\xi}_j^{(n)}(h)}(x)-2\int_{N_n(h)}^{\infty}x^2dF_{\tilde{\xi}_j^{(n)}(h)}(x)\Big)\\
&= 2\Big(1-\frac{1}{B_n^2(h)}\sum_{j=1}^{n}\int_{N_n(h)}^{\infty}x^2dF_{\tilde{\xi}_j^{(n)}(h)}(x)\Big) \qquad (4.24)\\
&= 2\Big(1-\frac{B_n^2(h)L_{4,n}(h)}{N_n^2(h)}\Big).
\end{aligned}$$

Žinant, kad $\mathbf{E}(\xi_j^{(n)}(h)-\mathbf{E}\xi_j^{(n)})^4=\Gamma_4(\xi_j^{(n)}(h))+3{\sigma_j^{(n)}}^4(h)$, randame

$$L_{4,n}(h)\leq\frac{\Gamma_4(S_n(h))}{B_n^4(h)}+3\max_{1\leq j\leq n}\frac{{\sigma_j^{(n)}}^2(h)}{B_n^2(h)}. \qquad (4.25)$$

Toliau, remiantis lygybe (4.20), kai $0\leq h\leq\Delta_n/12B_n=1/12K_n$, gauname

$${\sigma_j^{(n)}}^2(h)={\sigma_j^{(n)}}^2\Big(1+\theta\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)\Big(\frac{hB_n}{\Delta_n}\Big)^{k-2}\Big)={\sigma_j^{(n)}}^2(1+\theta(5/8)). \qquad (4.26)$$

Remiantis lygybe (4.25), nesunku įsitikinti, kad

$$|\Gamma_4(S_n(h))/B_n^4(h)|\leq 18,2(B_n/\Delta_n)^2/B_n^2(h). \qquad (4.27)$$

Atsižvelgę į nelygybes (4.25) ir (4.27), gauname

$$L_{4,n}(h)B_n^2(h)\leq 18,2(B_n/\Delta_n)^2.$$

Tegul $N_n(h) = 6,2(B_n/\Delta_n)$. Taip parinkus $N_n(h)$ ir remiantis lygybe (4.24), kad gauname $l_n(N_n(h)) \geq 1$. Tuomet

$$|f_{Z_n(h)}(t)| \leq \exp\{-t^2/\pi^2\}, \qquad |t| \leq T_n, \qquad T_n = \pi B_n(h)\Delta_n/(6,2B_n). \tag{4.28}$$

Dabar integralą I, apibrėžtą lygybe (4.22) suskaidome į du integralus $I = I_1 + I_2$,

$$I_1 = \int_{\tau_{n,0} \leq |t| \leq T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|dt, \qquad I_2 = \int_{|t| \geq T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|dt.$$

Iš (4.28), gauname

$$I_1 = \int_{\tau_{n,0} \leq |t| \leq T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|dt \leq (\pi^2/2\tau_n)\exp\{-\tau_n^2/\pi^2\}. \tag{4.29}$$

Remiantis 7 lema, p.42 funkcijai $I_{h,n}(t)$, apibrėžtai lygybe (4.23), visiems $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$ galioja įvertis

$$I_{h,n} \geq 2l_n(N_n(h))(t - t_{k_0}^{(n)})^2 B_n^2(h),$$

kur $(6N_n(h))^{-1} \leq t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \leq (4N_n(h))^{-1}$, ir $t_{k_0}^{(n)}$ fiksuotam n lygus $t_k^{(n)}$ arba $t_{k+1}^{(n)}$ priklausomai nuo t. Tegul $I_{h,n}(t) = \frac{1}{4}I_{h,n}(t) + \frac{3}{4}I_{h,n}(t)$. Tuomet remdamiesi 6 lema ir 7 lema, gauname

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{T_n}^{\infty} |f_{Z_n(h)}(t)|dt = 2\pi B_n(h) \int_{(2N_n(h))^{-1} \leq |t| < \infty} |f_{S_n(h)}(2\pi t)|dt \\
&\leq 2\pi B_n(h) \int_{(2N_n(h))^{-1} \leq |t| < \infty} \exp\{-I_{h,n}(t) - I_{h,4}(t)\}|f_{S_4(h)}(2\pi t)|dt \\
&\leq 2\pi e^4 B_n(h) \exp\Big\{-\frac{3}{4}M_n(h)\Big\} \sum_k \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(t - t_{k_0}^{(n)})^2 B_n^2(h)\Big\}|f_{S_4(h)}(2\pi t)|dt \\
&\leq 2\pi e^4 \sqrt{2\pi} \exp\Big\{-\frac{3}{4}M_n(h)\Big\} U_n(h),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

čia

$$M_n(h) \geq \frac{c_3}{K_n^2} \sum_{j=1}^{n} (C_j^{(n)})^{-2}, \qquad c_3 > 0 \tag{4.31}$$

ir $U_n(h)$, remiantis Koši nelygybe

$$
\begin{aligned}
U_n(h) &= \sum_k \sup_{t_k^{(n)}<t<t_{k+1}^{(n)}} |f_{S_4(h)}(2\pi t)| \\
&\le \prod_{i=1}^4 \Big(\sum_k \sup_{t_k^{(n)}<t<t_{k+1}^{(n)}} |f_{\xi_i(h)}(2\pi t)|^4 \Big)^{1/4}.
\end{aligned}
$$

Dabar, remdamiesi 8 lema, p.42 ir laikydami, kad $g_j(t) := |f_{\xi_j(h)}(2\pi t)|^2$, gauname

$$
\begin{aligned}
&|g_j(t+l) - g_j(t)| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi i(t+l)y\} p_{\tilde{\xi}_j(h)}(y)dy \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi ity\} p_{\tilde{\xi}_j(h)}(y)dy \Big| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi ity\}(\exp\{2\pi ily\} - 1) p_{\tilde{\xi}_j(h)}(y)dy \Big| \\
&\le 2\pi l \Big(\int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_{\tilde{\xi}_j(h)}(y)dy \Big)^{1/2} = 2\sqrt{2}\pi\sigma_j^{(n)}(h) l.
\end{aligned}
$$

Vadinasi, funkcija $|f_{\xi_j(h)}(2\pi t)|^2$ tenkina Lipšico sąlygą (3.49) su konstanta $K_j(h) = 2\sqrt{2}\pi\sigma_j^{(n)}(h)$ ir $V_j(h) = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(t)dt = p_{\tilde{\xi}_j(h)}(0) \le C_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Prisiminę, kad $N_n(h) = 6.2(B_n/\Delta_n)$, $\sigma_j^{(n)}(h) \le 1.75\tilde{\sigma}_j^{(n)}$ su visais $|h| \le \Delta_n/(12B_n)$ ir remiantis 8 lema, p.42, gauname

$$
\begin{aligned}
U_n(h) &\le \prod_{i=1}^4 \Big(\sum_k \sup_{t_k^{(n)}<t<t_{k+1}^{(n)}} |f_{\xi_i(h)}(2\pi t)|^4 \Big)^{1/4} \\
&\le 372K_n \prod_{i=1}^4 \Big((4 + 1.75\sqrt{2}\pi\sigma_i^{(n)}(6.7K_n)^{-1})C_i^{(n)} \Big)^{1/4} = 172K_n \prod_{i=1}^4 C_i^{(n)1/4}
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Taigi, pasinaudoję nelygybėmis (4.30) - (4.32), turime

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{T_n \le |t| < \infty} |f_{Z_n(h)}(t)|dt \le 684e^4\pi\sqrt{2\pi}K_n \max_{1\le r_i\le n} \prod_{i=1}^4 C_{r_i}^{(n)1/4} \\
&\times \exp\Big\{ -\frac{c_3}{K_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j^{(n)2}} \Big\}.
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

Remiantis nelygybėmis (4.30) ir (4.33), gauname teoremos tvirtinimą.

■

4.2.2 9 teoremos įrodymas

Norint įrodyti TEOREMĄ 9, reikia įvertinti asimptotinio skleidinio (4.11) liekamąjį narį

$$R^*_{n,\gamma} = \int_{T_{n,\gamma}}^{\infty} |f^*_{n,\gamma}(t)|dt = \int_{T_{n,\gamma}}^{\infty} \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!}\left(\frac{3x}{2}\right)^k |f^{(k)}_{Z_n}(t)|dt, \qquad \gamma > 0, \tag{4.34}$$

$f^{(k)}_{Z_n}(t)$ - at.d. Z_n ch.f. k-toji išvestinė, $f^{(0)}_{Z_n}(t) = f_{Z_n}(t)$.

Pirmiausia rasime at.d. Z_n ch.f. $l - tosios$ išvestinės $f^{(l)}_{Z_n}(t)$ įvertį. Remiantis 5 teoremos įrodyme gautais pažymėjimais ir įverčiais (3.78) - (3.85), bei 8 lema, p.42, gauname

$$\begin{aligned} |f^{(l)}_{Z_n}(t)| &\le c(l)(1 + (|t|^l \wedge L^l_{1,n}) + L_{l,n}) \\ &\times \max_{1\le k_1 \ne \ldots \ne k_l \le n} |f_{Z_n,k_1,\ldots,k_l}(t)|, \qquad l = 3, 4, \ldots. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Prisiminus, kad $N_n = 4B_nL_{3,n}$, srityje $|t| \le \frac{1}{4}\pi L^{-1}_{3,n}$, gauname charakteristinės funkcijos $l - tosios$ išvestinės įvertį

$$|f^{(l)}_{Z_n}(t)| \le c_1(l)(1 + |t|^l \wedge L_{1,n} + L_{l,n}) \exp\left\{ - \frac{t^2}{\pi^2}\right\}, \qquad l = 3, 4, \ldots, \tag{4.36}$$

kur $c_1(l) = c(l)\exp\{l/2\}$. Tarkime $T_n = (\pi/4)L^{-1}_{3,n}$ ir $T_{n,\gamma}/2 = 1/4(1 - x/\Delta_{n,\gamma})\Delta_{n,\gamma}$.Tada imkime

$$\int_{T_{n,\gamma}}^{\infty} |f^*_{n,\gamma}(t)dt = I_3 + I_4, \tag{4.37}$$

kur

$$I_3 = \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!}\left(\frac{3x}{2}\right)^l \int_{T_{n,\gamma}}^{T_n} |f^{(l)}_{Z_n}(t)|dt, \tag{4.38}$$

$$I_4 = \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!}\left(\frac{3x}{2}\right)^l \int_{T_n}^{\infty} |f^{(l)}_{Z_n}(t)|dt. \tag{4.39}$$

Integralą I_3 suskaidysime į keturis

$$I_3 = I_3^{(0)} + I_3^{(1)} + I_3^{(2)} + I_3^{(3)}, \tag{4.40}$$

kur

$$
\begin{aligned}
I_3^{(0)} &= \int_{T_{n,\gamma}/2}^{T_n} |f_{Z_n}(t)|dt \le \int_{T_{n,\gamma}/2}^{T_n} \exp\{-t^2/\pi^2\}dt \le \frac{\pi^2}{2T_{n,\gamma}} \exp\Big\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\Big\}; \qquad (4.41)\\
I_3^{(1)} &= \frac{3x}{2}\int_{T_{n,\gamma}}^{T_n} |f_{Z_n}^{(1)}(t)|dt \le \frac{3\sqrt{e}x}{2}\int_{T_{n,\gamma}}^{T_n} (t \wedge L_{1,n}) \exp\{-t^2/\pi^2\}dt\\
&\le \frac{3\sqrt{e}\pi^2 x}{2} \exp\{-\frac{1}{\pi^2}(T_{n,\gamma}/2)^2; \qquad (4.42)\\
I_3^{(2)} &= \frac{1}{4}\Big(\frac{3x}{2}\Big)^2 \int_{T_{n,\gamma}/2}^{T_n} |f_{Z_n}^{(2)}(t)|dt \le \frac{9ex^2}{16}\int_{T_{n,\gamma}/2}^{T_n} (1+(t^2 \wedge L_{1,n}^2))\\
&\times \exp\{-\frac{t^2}{\pi^2}\}dt \le \frac{9e\pi^2x^2}{32}\Big(T_{n,\gamma}/2 + \frac{\pi^2}{2T_{n,\gamma}}\Big)\exp\Big\{-\frac{1}{\pi^2}(T_{n,\gamma}/2)^2\Big\}; \qquad (4.43)\\
I_3^{(3)} &= \sum_{l=3}^{s}\frac{1}{l!}\Big(\frac{3x}{2}\Big)^l \int_{T_{n,\gamma}/2}^{T_n} |f_{Z_n}^{(l)}(t)|dt \le \sum_{l=3}^{s}\frac{1}{l!}\Big(\frac{3x^l}{2}\Big)c_1(l)\\
&\times \int_{T_{n,\gamma}/2}^{T_n} (1+(|t|^l \wedge L_{1,n}^l) + L_{l,n}) \exp\Big\{-\frac{1}{\pi^2}t^2\Big\}dt \le \frac{\pi^2}{2T_{n,\gamma}/2}\sum_{l=3}^{s}\frac{1}{l!}\Big(\frac{3\sqrt{e}x}{4}\Big)^l\\
&\times \exp\Big\{1+\Big(L_{1,n}^l \wedge ((T_{n,\gamma}/2)^l + (\pi/\sqrt{2})^l)\Big) + (l-2)!/(3,8\Delta_{n,\gamma})^{l-2}\Big\}\\
&\times \exp\Big\{-\frac{1}{\pi^2}(T_{n,\gamma}/2)^2\Big\} \le \frac{\pi^2}{2T_{n,\gamma}/2}\exp\Big\{-\frac{1}{16\pi^2}(T_{n,\gamma}/2)^2\Big\}\\
&+ \frac{T_{n,\gamma}/2}{48\pi^2}\exp\Big\{-\frac{1}{\pi^2}(T_{n,\gamma}/2)^2\Big\}, \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

su visais $1 \le x \le 5(T_{n,\gamma}/2)/(8\pi^2\sqrt{e})$. Remdamiesi įverčiais (4.41) - (4.44) gauname

$$
I_3 \le \frac{\pi^2}{T_{n,\gamma}}\exp\Big\{-\frac{1}{16\pi^2}T_{n,\gamma}^2\Big\} + \frac{5\pi^2x^2}{8}T_{n,\gamma}\exp\Big\{-\frac{1}{\pi^2}T_{n,\gamma}^2\Big\}. \qquad (4.45)
$$

Dabar, remdamiesi lygybe (3.78) ir $I_j(t)$ išraiška (3.35), rasime integralo I_4, apibrėžto lygybe (4.39) įvertį. Iš pradžių įvertinsime integralą

$$
\tilde{I}_4 = \int_{|t|\ge T_n} |f_{Z_n,k_1,\ldots,k_j}(t)|dt, \qquad j \le l, l = 0,1,\ldots,s. \qquad (4.46)
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_4 &\le 2\pi B_n \int_{|t|\ge 1/2N_n} \prod_{r=1}^{4}{}'' |f_{\xi_{r_i}}(2\pi t)| \prod_{i=1}^{n-j-4}{}' |f_{\xi_{l_i}}(2\pi t)|dt\\
&\le 2\pi B_n \int_{|t|\ge 1/2N_n} \exp\{-[I_n(t) - (I_{k_1}(t) + \ldots + I_{k_j}(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ &\quad I_{r_1}(t)+\ldots+I_{r_4}(t)]\} \prod_{i=1}^{4}{}'' |f_{\xi_i}(2\pi t)| dt \leq 2\pi B_n \exp\left\{\frac{j+4}{2}\right\} \\
\times &\quad \int_{|t|\geq 1/2N_n} \exp\{-I_n(t)\} \prod_{i=1}^{4}{}'' |f_{r_i}(2\pi t)| dt. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

Čia $\prod''$- sandauga visų $r_i, i = 1,2,3,4$, kurie nesutampa su $k_1, k_2, \ldots, k_j$; $\prod'$- sandauga visų indeksų l_i, kurie nesutampa nei su $k_1, \ldots, k_j$ nei su r_1, r_2, r_3, r_4. Remiesi 7 lema ir 8 lema, p.42, suskaidžius integralą $I_n(t)$ į dvi dalis $I_n(t) = \frac{3}{4}I_n(t) + \frac{1}{4}I_n(t)$, ir pasinaudoję nelygybe (4.47), randame

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_4 &\leq 2\pi B_n \exp\left\{\frac{j+4}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{3}{4}M_n\right\} \\
&\times \sum_k \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t-t_{k0}^{(n)})^2 B_n^2\right\} \prod_{i=1}^{4}{}'' |f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)| dt \\
&\leq \pi\sqrt{2\pi} \exp\left\{\frac{j+4}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4}M_n\right\} U_n, \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

kur $t_{k0}^{(n)}$, bet kokiam n priklausomai nuo t ir yra lygus $t_k^{(n)}$ arba $t_{k+1}^{(n)}$,

$$
M_n \geq (1/256) \sum_{j=1}^{n} \left(({\sigma_j^{(n)}}^2 + N_n^2){C_j^{(n)}}^2 \right)^{-1}, \qquad (4.49)
$$

$$
\begin{aligned}
U_n &:= \sum_k \sup_{t_k^{(n)} \leq t \leq t_{k+1}^{(n)}} \prod_{i=1}^{4}{}'' |f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)| \\
&\leq \prod_{i=1}^{4}{}'' \left(\sum_k \sup_{t_k^{(n)} \leq t \leq t_{k+1}^{(n)}} |f_{\xi_{r_i}^{(n)}}(2\pi t)|^4 \right)^{1/4}.
\end{aligned}
$$

Dabar, pasirėmę (4.35), (4.39), (4.48) ir U_n įverčiu (3.104), gauname

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_4 &\leq 24\pi\sqrt{2\pi} \exp\left\{\frac{j+4}{2}\right\} N_n \prod_{i=1}^{4} {C_{r_i}^{(n)}}^{1/4} \left(1 + \frac{\pi\sigma_{r_i}^{(n)}}{2\sqrt{2}N_n}\right)^{1/4} \\
&\times \exp\left\{-c_2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{({\sigma_j^{(n)}}^2 + N_n^2){C_j^{(n)}}^2}\right\}. \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Dabar į išraišką (4.39) įstatę įvertį (4.50), gauname integralo I_4 įvertinimą

$$
I_4 \leq 24\pi\sqrt{2\pi}e^2 N_n \max_{1\leq r_i \leq s+4} \prod_{i=1}^{4} {C_{r_i}^{(n)}}^{1/4} \left(1 + \frac{\pi\sigma_{r_i}^{(n)}}{2\sqrt{2}N_n}\right)^{1/4} \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{l!} \left(\frac{3\sqrt{e}x}{4}\right)^l
$$

$$\times \quad (1 + L_{1,n}^l + L_{l,n}) \exp\Bigg\{ - d \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{({\sigma_j^{(n)}}^2 + N_n^2){C_j^{(n)}}^2} \Bigg\}, \tag{4.51}$$

kur d apibrėžtas lygybe (3.111). Pagaliau, prisiminę lygybes (4.38), (4.39) ir remiantis įverčiais (4.45) ir (4.51), gauname

$$\begin{aligned}
\int_{T_{n,\gamma}}^{\infty} |f_n^*(t)| dt \quad &= \quad \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!} \left(\frac{3x}{2} \right)^l \int_{T_{n,\gamma}}^{\infty} |f_{Z_n}^{(l)}(t)| dt \\
&\leq \quad \frac{5e\pi T_{n,\gamma} x^2}{16} \exp\Bigg\{ - \frac{(T_{n,\gamma}^2)}{\pi^2} \Bigg\} + \frac{\pi^2}{T_{n,\gamma}} \exp\Bigg\{ - \frac{1}{16\pi^2} (T_{n,\gamma})^2 \Bigg\} \\
&+ \quad 42\pi\sqrt{2\pi} e^2 N_n \max_{1 \leq r_i \leq n} \prod_{i=1}^{4} {C_{r_i}^{(n)}}^{1/4} \left(1 + \frac{\pi \sigma_{r_i}^{(n)}}{2\sqrt{2} N_n} \right)^{1/4} \\
&\times \quad \exp\Bigg\{ - d \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{({\sigma_k^{(n)}}^2 + N_n^2){C_k^{(n)}}^2} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

■

5 Skyrius

Bendrųjų teoremų taikymai

5.1 Diskontavimo ribinės teoremos

5.1.1 Santrauka

Skyrius skirtas nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių (at.d.) sekos X_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ su vidurkiais $\mathbf{E}X_j = \mu$, ir dispersijomis $\sigma^2 = \mathbf{E}X_j^2$ diskontavimo didžiųjų nuokrypių ribinių teoremų įrodymui. Šio skyriaus rezultatai yra išspausdinti straipsnyje:

Saulis L., Deltuvienė D. The discounted limit theorems for large deviations, Lietuvos matematikos rinkinys, T.**43**, spec. nr. 43, Vilnius, MII, 2003, p. 703 - 708.

Tegul $X_0, X_1, X_2, \ldots$ nepriklausomų at.d. seka su ta pačia pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir v bus diskontavimo faktorius $(0 < v < 1)$. Apibrėžkime

$$S_v = \sum_{k=0}^{\infty} v^k X_k. \tag{5.1}$$

Tarkime, kad pirmieji trys at.d. X_k momentai yra baigtiniai:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) < \infty, \\ \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 dF(x) < \infty, \\ \rho &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^3 dF(x) < \infty. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Tada nesunku įsitikinti, kad at.d. S_v vidurkis ir dispersija atitinkamai yra

$$\mathbf{E}S_v = \mu(1-v)^{-1}, \qquad \mathbf{D}S_v = \sigma^2(1-v^2)^{-1}, \tag{5.3}$$

Toliau nagrinėsime centruotą, normuotąjį at.d.

$$Z_v = \sigma^{-1}(1-v)^{\frac{1}{2}}(S_v - \mu(1-v)^{-1}), \tag{5.4}$$

kurio vidurkis $\mathbf{E}Z_v = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}Z_v = (1+v)^{-1}$. At.d. Z_v pasiskirstymo funkciją žymėsime $F_v(x)$ ir nagrinėsime normalųjį skirstinį su nuliniu vidurkiu ir dispersija $(1+v)^{-1}$

$$N_v(x) = \left(\frac{1+v}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\Big\{-\frac{1+v}{2}y^2\Big\}dy. \tag{5.5}$$

Hans U.Gerber darbe [19] įrodė Berry-Esseen teoremą, kai at.d. taikomas diskontavimas: jei tenkinamos sąlygos (5.2), tai visiems x yra teisinga nelygybė

$$|F_v(x) - N_v(x)| \le 5.4(\rho/\sigma^3)(1-v)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.6}$$

Mes nagrinėsime tikimybės $\mathbf{P}(Z_v \ge x)$, kai $x = x_v \to \infty$, $v \to 1$, asimptotinį skleidinį, t.y. įrodysime didžiųjų nuokrypių teoremas at.d. Z_v apibrėžtam lygybe (5.4), remdamiesi kumuliantų metodu, kai at.d. X_0 centriniai momentai $\mathbf{E}(X_0-\mu)^s$ tenkina apibendrintą Bernšteino sąlygą $(\widehat{\mathbf{B}}_\gamma)$:

egzistuoja dydžiai $\gamma \ge 0$ ir $K > 0$ tokie, kad

$$|\mathbf{E}(X_0-\mu)^s| \le (s!)^{1+\gamma}K^{s-2}\sigma^2, s = 3, 4, \ldots . \tag{$\widehat{B}_\gamma$}$$

5.1.2 Didžiųjų nuokrypių diskontavimo versija

Pažymėkime

$$\Delta_v = \frac{\sigma}{2(K \vee \sigma)}(1-v)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \Delta_v(\gamma) = c_v(\gamma)\Delta_v^{\frac{1}{1+2\gamma}}, \tag{5.7}$$

kur $c_v(\gamma) = (1/6)(\sqrt{2}/(6(1+v)^{1+\gamma}))^{1/(1+2\gamma)}$ ir $a \vee b = \max\{a, b\}$.

T E O R E M A 10. *Tegul* X_k *at.d. su* $\mathbf{E}X_k = \mu$ *ir* $\sigma^2 = \mathbf{E}(X_k - \mu)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *tenkina sąlygą* $(\widehat{B}_\gamma)$*, tai at.d.* Z_v*, apibrėžto lygybe* (5.4)*, pasiskirstymo funkcijai* $F_v(x)$ *intervale* $0 \le x < \Delta_v(\gamma)$ *galioja didžiųjų nuokrypių lygybės*

$$\begin{aligned} \frac{1-F_v(x)}{1-N_v(x)} &= \exp\{L_\gamma(x)\}\Big(1 + \theta_1 f(x)\frac{x+1}{\Delta_v(\gamma)}\Big), \\ \frac{F_v(-x)}{N_v(-x)} &= \exp\{L_\gamma(-x)\}\Big(1 + \theta_2 f(x)\frac{x+1}{\Delta_v(\gamma)}\Big). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Čia

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{60\Big(1 + (1+v)\Delta_v^2(\gamma)\exp\Big\{-(1 - x\Delta_v(\gamma))\sqrt{\Delta_v(\gamma)}\Big\}\Big)}{(1 - x/\Delta_v(\gamma))}, \\ L_\gamma(x) &= \sum_{3 \le k < p} \lambda_k x^k + \theta(x/\Delta_v(\gamma)), \qquad p = \begin{cases} (1/\gamma) + 2, & \gamma > 0, \\ \infty, & \gamma = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Koeficientai λ_k *išreiškiami per at.d.* Z_v *kumuliantus ir gaunami iš formulės* $\lambda_k = -b_{k-1}/k$*, kur* b_k *yra apibrėžti lygybe (2.9). Atskiru atveju:*

$$\begin{aligned} b_1 &= \Gamma_2^{-1}(Z_v) = 1 + v, \quad b_2 = -\frac{1}{2}(1+v)^3\Gamma_3(Z_v), \\ b_3 &= -\frac{1}{6}(1+v)^4(\Gamma_4(Z_v) - 3(1+v)\Gamma_3^2(Z_v)), \\ b_4 &= -\frac{1}{24}(1+v)^5(\Gamma_5(Z_v) - 10(1+v)\Gamma_3(Z_v)\Gamma_4(Z_v) + 15(1+v)^2\Gamma_3^3(Z_v)), \end{aligned}$$

Koeficientai λ_k *tenkina nelygybę*

$$|\lambda_k| \le \frac{2(1+v)}{k}\Big(\frac{16(1+v)}{\Delta_v}\Big)^{k-2}((k+1)!)^\gamma, \qquad k = 3, 4, \ldots, \tag{5.10}$$

todėl

$$L_\gamma(x) \le \frac{(1+v)x^2}{2}\frac{x}{x+8\Delta_v(\gamma)}, \qquad L_\gamma(-x) \ge -\frac{(1+v)x^3}{3\Delta_v(\gamma)}. \tag{5.11}$$

T E O R E M A 11. *Tegul at.d.* X_k, $k = 0,1,2,\dots$ *tenkina sąlygą* $(\widehat{B}_\gamma)$, *tai pasiskirstymo funkcijai* $F_v(x)$, *visiems* $x \ge 0$, $x = o(\Delta_v^\nu)$, *kur* Δ_v *apibrėžta lygybe* (5.7) *ir* $\nu = \nu(\gamma) = (1+2\max\{1,\gamma\})^{-1}$, *teisingos lygybės*

$$\lim_{v\to 1}\frac{1-F_v(x)}{1-N_v(x)} = 1, \qquad \lim_{v\to 1}\frac{F_v(-x)}{N_v(-x)} = 1. \tag{5.12}$$

Atskiru atveju, kai $\gamma = 0$, *lygybės* (5.12) *teisingos su visais* $x \ge 0$, $x = o((1-v)^{-\frac{1}{6}})$.

T E O R E M A 12. *Tegul at.d.* X_k, $k = 0,1,2,\dots$ *tenkina sąlygą* $(\widehat{B}_\gamma)$, *tai tikimybei* $\mathbf{P}(\pm Z_v \ge x)$, *su* $H_v = 2^{1+\gamma}(1+v+v^2)^{-1}$ *ir* $\Delta_v = \frac{\sigma}{2(K\vee\sigma)}(1-v)^{-\frac{1}{2}}$ *yra teisingos eksponentinės nelygybės*

$$\mathbf{P}(\pm Z_v \ge x) \le \begin{cases} \exp\Big\{-\frac{1}{4H_v}x^2\Big\}, & 0 \le x \le (H_v^{1+\gamma}\Delta_v)^{1/(1+2\gamma)}, \\ \exp\Big\{-\frac{1}{4}(x\Delta_v)^{1/(1+\gamma)}\Big\}, & x \ge (H_v^{1+\gamma}\Delta_v)^{1/(1+2\gamma)}. \end{cases} \tag{5.13}$$

5.1.3 10 − 12 teoremų įrodymai

Teoremas įrodysime remdamiesi kumuliantų metodu, kurį pasiūlė V. Statulevičius ir išplėtojo R. Rudzkis, L. Saulis, V. Statulevičius [53], [60], [63]. Tegul $f(t) = \mathbf{E}\exp\{itX_k\}$ yra at.d. X_k, $k = 0,1,2,\dots$ charakteristinė funkcija. Tuomet, žinodami, kad at.d. S_v iš apibrėžimo (5.1) ir atsižvelgę į tai, kad at.d. X_k, $k = 0,1,2,\dots$ yra nepriklausomi, gauname at.d. Z_v charakteristinės funkcijos $f_{Z_v}(t)$ išraišką:

$$\begin{aligned} f_{Z_v}(t) &= \mathbf{E}\exp\{itZ_v\} = \mathbf{E}\exp\{it\sigma^{-1}(1-v)^{\frac{1}{2}}(S_v - \mu(1-v)^{-1})\} \\ &= \exp\{-it\mu\sigma^{-1}(1-v)^{-\frac{1}{2}}\}\mathbf{E}\exp\{it\sigma^{-1}(1-v)^{\frac{1}{2}}S_v\} \\ &= \exp\{-it\mu\sigma^{-1}(1-v)^{-\frac{1}{2}}\}\prod_{k=0}^{\infty} f(\sigma^{-1}(1-v)^{\frac{1}{2}}v^k t). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Iš čia

$$\ln f_{Z_v}(t) = -it\mu\sigma^{-1}(1-v)^{-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} \ln f(\sigma^{-1}(1-v)^{\frac{1}{2}} v^k t). \tag{5.15}$$

Atsitiktinio dydžio Z_v, $s - tosios$ eilės kumulantas

$$\Gamma_s(Z_v) := \frac{1}{i^s} \frac{d^s}{dt^s} \ln f_{Z_v}(t)\Big|_{t=0}, s = 1, 2, \ldots. \tag{5.16}$$

Tuomet, remdamiesi lygybe (5.15), gauname $\Gamma_1(Z_v) = \mathbf{E}Z_v = 0$,

$$\Gamma_s(Z_v) = \left(\frac{(1-v)^{1/2}}{\sigma}\right)^s \frac{1}{1-v^s}\,\Gamma_s(X_0),\ \ s = 2, 3, \ldots. \tag{5.17}$$

Atskiru atveju:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(Z_v) &= \mathbf{D}Z_v = (1+v)^{-1} \\ \Gamma_3(Z_v) &= \frac{(1-v)^{1/2}}{1+v+v^2}\,\frac{\Gamma_3(X_0)}{\sigma^3} = \frac{(1-v)^{1/2}}{1+v+v^2}\,\frac{\mathbf{E}(X_0-\mu)^3}{\sigma^3}, \ldots. \end{aligned}$$

Norint įrodyti teoremas, reikia įvertinti $\Gamma_s(Z_v)$, $s = 3, 4, \ldots$.

T E I G I N Y S 4. *Jei at.d.* X_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *su* $\mathbf{E}X_k = \mu$ *ir* $\sigma^2 = \mathbf{E}(X_k - \mu)^2$ *tenkina sąlygą* $(\widehat{B}_\gamma)$, *tai*

$$|\Gamma_s(Z_v)| \leq \frac{1}{1+v+v^2}\,\frac{(s!)^{1+\gamma}}{\Delta_v^{s-2}}, \qquad s = 3, 4, \ldots, \tag{5.18}$$

kur

$$\Delta_v = \frac{1}{2(K \vee \sigma)}\,\frac{\sigma}{\sqrt{1-v}}.$$

Įrodymas. Remdamiesi 3.1 lema [60] ir sąlyga $(\widehat{\mathbf{B}}_\gamma)$ bei pastebėję, kad $\Gamma_s(X_0 - \mathbf{E}X_0) = \Gamma_s(X_0)$, $s = 2, 3, \ldots$, gauname

$$|\Gamma_s(X_0)| \leq (s!)^{1+\gamma} (2(K \vee \sigma))^{s-2} \sigma^2, \qquad s = 3, 4, \ldots. \tag{5.19}$$

Dabar pasinaudoję at.d. Z_v, $s - tosios$ eilės kumulianto $\Gamma_s(Z_v)$, $s = 3, 4, \ldots$ išraiška (5.17), turime

$$|\Gamma_s(Z_v)| \leq \frac{(s!)^{1+\gamma}}{1-v^s}\left(\frac{(1-v)^{1/2}}{\sigma}\right)^s (2(K \vee \sigma))^{s-2}\sigma^2 \leq$$
$$\frac{(1-v)^{s/2}(s!)^{1+\gamma}}{1-v^3}\left(\frac{2(K \vee \sigma)}{\sigma}\right)^{s-2} = \frac{1}{1+v+v^2}\frac{(s!)^{1+\gamma}}{\Delta_v^{s-2}}, \tag{5.20}$$

kur Δ_v apibrėžtas lygybe (5.7).

■

10 teoremos įrodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad $F_v(x) = \mathbf{P}(Z_v < x) = \mathbf{P}(Z_v^* < x_v)$, kur

$$Z_v^* = (\mathbf{D}Z_v)^{-1/2}Z_v = (1+v)^{1/2}Z_v, \qquad x_v = (1+v)^{1/2}x. \tag{5.21}$$

Be to,

$$\Phi(x_v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_v} \exp\Big\{-\frac{1}{2}y^2\Big\}dy = N_v(x), \tag{5.22}$$

kur $N_v(x)$ apibrėžtas lygybe (5.5). Turėdami at.d. Z_v^* su vidurkiu $\mathbf{E}Z_v^* = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}Z_v^* = 1$, $s - tosios$ eilės kumuliantų apibrėžimą $\Gamma_s(Z_v^*) = (1+v)^{s/2}\Gamma_s(Z_v)$, $s = 1, 2, \ldots$ ir remdamiesi įverčiu (5.18), gauname

$$|\Gamma_s(Z_v^*)| \leq \frac{(1+v)^{s/2}}{1+v+v^2}\frac{(s!)^{1+\gamma}}{\Delta_v^{s-2}} \leq \frac{(s!)^{1+\gamma}}{(\Delta_v^*)^{s-2}}, \qquad s = 3, 4, \ldots, \tag{5.23}$$

kur $\Delta_v^* = (1+v)^{-1/2}\Delta_v$. Vadinasi, kai at.d. $\xi = Z_v^*$, tenkina sąlygą $(\mathbf{S}_\gamma)$ 1 lemoje [60, p.22], imame $\Delta = \Delta_v^* = (1+v)^{-1/2}\Delta_v$. Todėl, remdamiesi šia lema ir įverčiais (5.19), (5.20), gauname 10 teoremos tvirtinimą.

■

11 teoremos įrodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad

$$\Delta_v = \frac{\sigma}{2(K \vee \sigma)} \frac{1}{(1-v)^{1/2}} \longrightarrow \infty, \qquad v \to 1. \tag{5.24}$$

Tuomet iš 10 teoremos, nesunku įsitikinti, kad su visais $x = o(\Delta_v^\nu)$, kur $\nu = \nu(\gamma) = (1 + 2\max\{1,\gamma\})^{-1}$,

$$\frac{x}{\Delta_v(\gamma)} = \frac{1}{c_v(\gamma)}\, o\Big(\Delta_v^{2(\gamma-\max\{1,\gamma\})/\big((1+2\gamma)(1+2\max\{1,\gamma\})\big)}\Big) \to 0, \tag{5.25}$$

nes $\gamma - \max\{1,\gamma\} \le 0$ su visais $\gamma \ge 0$. Remiantis 10 teoremos tvirtinimu, reikia parodyti, kad su visais $x = o(\Delta_v^\nu)$, $L_\gamma(x) \to 0$. Prisiminę $L_\gamma(x)$ išraišką (5.9) ir pasinaudoję at.d. Z_v kumuliantų $\Gamma_s(Z_v)$ įverčiais (5.18), gauname

$$\begin{aligned} |\lambda_3 x^3| &= \frac{1}{6}(1+v)^3|\Gamma_3(Z_v)x^3| \le \frac{1+v)^2 6^\gamma}{\Delta_v} o(\Delta_v^{3\nu}) \\ &= (1+v)^2 6^\gamma o(\Delta_v^{2(1-\max\{1,\gamma\})/(1+2\max\{1,\gamma\})}) \to 0, \end{aligned} \tag{5.26}$$

nes $1 - \max\{1,\gamma\} \le 0$.

■

12 teoremos įrodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad $\Gamma_2(Z_v) = \mathbf{D}Z_v = (1+v)^{-1} < H_v$, kur $H_v = 2^{1+\gamma}(1+v+v^2)^{-1}$. Tada, remdamiesi at.d. Z_v, kurio vidurkis $\mathbf{E}Z_v = 0$, $s - tosios$ eilės kumuliantų $\Gamma_s(Z_v)$, $s \ge 3$, įverčiu (5.20) turime

$$|\Gamma_s(Z_v)| \le \Big(\frac{s!}{2}\Big)^{1+\gamma} \frac{H_v}{\Delta_v^{s-2}}, s = 2, 3, \dots\ . \tag{5.27}$$

Dabar, pritaikę 2.4 lemą [60, p.31], imdami at.d $\xi = Z_v$ ir gauname nelygybes (5.13), kai $H = H_v$ ir $\bar{\Delta} = \Delta_v$, kur Δ_v apibrėžtas lygybe (5.7).

■

5.2 Atsitiktinių dydžių sumavimas su svoriais

Tegul $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - nepriklausomi, nevienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai (at.d.) su vidurkiu, kurį, nemažindami bendrumo, laikysime lygų nuliui, t.y. $\mathbf{E}X_j = 0$, teigiama dispersija $\sigma_j^2 = \mathbf{E}X_j^2 > 0$ ir a_{nj} - neneigiami pastov̄us dydžiai.

Pažymėsime:

$$\xi_j^{(n)} = a_{nj}X_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.28}$$

tada

$$\tilde{S}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}X_j, \qquad \tilde{B}_n^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2\sigma_j^2, \qquad \tilde{Z}_n = \frac{\tilde{S}_n}{\tilde{B}_n}, \tag{5.29}$$

$$F_{\tilde{Z}_n}(x) = \mathbf{P}(\tilde{Z}_n < x), \qquad p_{\tilde{Z}_n}(x) = \frac{d}{dx}F_{\tilde{Z}_n}(x), \tag{5.30}$$

T E I G I N Y S 5. *Tegul nepriklausomi, nevienodai pasiskirstę at.d.* X_j, $j = 1, 2, \ldots$, *su* $\mathbf{E}X_j = 0$ *ir* $\sigma_j^2 = \mathbf{E}X_j^2$ *tenkina sąlygą* $(\tilde{\mathbf{B}}_\gamma)$*: egzistuoja dydžiai* $\gamma \geq 0$ *ir* $K > 0$ *tokie, kad*

$$|\mathbf{E}X_j^k| \leq (k!)^{1+\gamma}K^{k-2}\sigma_j^2, \qquad k = 3, 4, \ldots, \tag{$\tilde{B}_\gamma$}$$

tuomet at.d. $\tilde{Z}_n$, $k - tosios$ *eilės kumuliantui* $\Gamma_k(\tilde{Z}_n)$ *galioja įvertis*

$$|\Gamma_k(\tilde{Z}_n)| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\tilde{\Delta}_n^{k-2}}, \qquad k = 3, 4, \ldots, \tag{$\tilde{S}_\gamma$}$$

kur

$$\tilde{\Delta}_n = \frac{\tilde{B}_n}{\tilde{K}_n}, \qquad \tilde{K}_n = \max_{1\leq j\leq n}(2a_{nj}\{K \vee \sigma\}). \tag{5.31}$$

ĮRODYMAS. Pastebėsime, kad $\mathbf{E}\tilde{S}_n = 0$, $\mathbf{E}\tilde{Z}_n = 0$ ir $\mathbf{D}\tilde{Z}_n = 1$. Nagrinėsime sumos $\tilde{S}_n$ charakteristinę funkciją $f_{\tilde{S}_n}(t)$ ir, remdamiesi tuo, kad at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots$ yra nepriklausomi, gaunamė

$$
\begin{aligned}
f_{\tilde{S}_n}(t) &= \mathbf{E}e^{it\tilde{S}_n} = \mathbf{E}e^{it(a_{n1}\xi_1^{(n)}+\ldots+a_{nn}\xi_n^{(n)})} = \mathbf{E}\Big(e^{ita_{n1}\xi_1^{(n)}} \times \ldots \times e^{ita_{nn}\xi_n^{(n)}}\Big) \\
&= \mathbf{E}e^{i(ta_{n1})\xi_1^{(n)}} \times \ldots \times \mathbf{E}e^{i(a_{nn})\xi_n^{(n)}} = \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j^{(n)}}(a_{nj}t). \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

Imame charakteristinės funkcijos logaritmą

$$
\ln f_{\tilde{S}_n}(t) = \sum_{j=1}^{n} \ln f_{\xi_j^{(n)}}(a_{nj}t)
$$

ir randame $k - tosios$ eilės išvestinę

$$
\Big(\ln f_{\xi_j^{(n)}}(a_{nj})\Big)^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \Big(\ln f_{\xi_j^{(n)}}(a_{nj}t)\Big)^{(k)},
$$

prisiminę $k - tosios$ eilės kumulianto apibrėžimą, turime

$$
\Gamma_k(\tilde{S}_n) = \frac{1}{i^k}\Big(\ln f_{\tilde{S}_n}(t)\Big)^{(k)}\Big|_{t=0}. \qquad (5.33)
$$

Taigi gauname, kad

$$
\Gamma_k(\tilde{S}_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^k \Gamma_k(\xi_j^{(n)}). \qquad (5.34)
$$

Dabar rasime at.d. $\tilde{S}_n$, $k - tosios$ eilės kumulianto įvertį

$$
\begin{aligned}
|\Gamma_k(\tilde{S}_n)| &\le \sum_{j=1}^{n} |\Gamma_k(\xi_j^{(n)})| = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^k |\Gamma_k(X_j)| \\
&\le \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^k (k!)^{1+\gamma} (2\max\{K, \sigma_j\})^{k-2}\sigma_j^2 \qquad (5.35) \\
&= (k!)^{1+\gamma} \sum_{j=1}^{n} (2a_{nj}\{K \vee \sigma_j\})^{k-2} a_{nj}^2 \sigma_j^2 \le (k!)^{1+\gamma} \tilde{K}_n^{k-2} \tilde{B}_n^2.
\end{aligned}
$$

Vadinasi, at.d. $\tilde{Z}_n$, $k - tosios$ eilės kumulianto įvertis

$$
\begin{aligned}
|\Gamma_k(\tilde{Z}_n)| &= \frac{|\Gamma_k(\tilde{S}_n)|}{\tilde{B}_n^k} \le \frac{(k!)^{1+\gamma}\tilde{K}_n^{k-2}\tilde{B}_n^2}{\tilde{B}_n^k} \\
&= \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\tilde{\Delta}_n^{k-2}}, \qquad k = 3, 4, \ldots, \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

kur $\tilde{\Delta}_n^{k-2} := \left(\frac{\tilde{B}_n}{\tilde{K}_n}\right)^{k-2}$, o $\tilde{B}_n$ ir $\tilde{K}_n$ atitinkamai apibrėžti lygybėmis (5.29) ir (5.31).

■

T E I G I N Y S 6. *Tegul at.d.* X_j, $j = \overline{1, n}$ *su vidurkiu* $\mathbf{E}X_j = 0$ *ir dispersija* $\sigma_j = \mathbf{E}X_j^2 > 0$ *egzistuoja skirstinio tankis* $p_{X_j}(x)$, *ir* $\sup_x p_{X_j}(x) < C$, *tuomet at.d.* $\xi_j^{(n)} = a_{nj}X_j$, *tankis* $p_{\xi_j^{(n)}}(x)$ *tenkina nelygybę*

$$\sup_x p_{\xi_j^{(n)}}(x) \le \frac{C_j}{a_{nj}}. \qquad (\tilde{\mathbf{D}})$$

Tuomet, kai at.d. $\xi_j^{(n)}$ tankis neegzistuoja, tarsime, kad $C_j = \infty$.

Įrodymas. At.d. $\xi_j^{(n)} := a_{nj}X_j$ vidurkis $\mathbf{E}\xi_j^{(n)} = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}{\xi_j^{(n)}}^2 = a_{nj}^2\mathbf{E}X_j^2 = a_{nj}^2\sigma_j^2$. Remdamiesi formule

$$p_{\xi_j^{(n)}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\xi_j^{(n)}}(t)dt$$

ir pastebėję, kad $f_{\xi_j^{(n)}}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_j^{(n)}} = \mathbf{E}e^{ita_{nj}X_j} = f_{X_j}(a_{nj}t)$ bei padarę pakeitimą $a_{nj}t = y$, gauname

$$\begin{aligned} p_{\xi_j^{(n)}}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{y}{a_{nj}}x} f_{X_j}(y)\frac{dy}{a_{nj}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{a_{nj}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{itx}{a_{nj}}} f_{X_j}(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{a_{nj}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\frac{x}{a_{nj}}} f_{X_j}(t)dt = \frac{1}{a_{nj}} p_{X_j}\left(\frac{x}{a_{nj}}\right). \end{aligned}$$

Čia $p_{X_j}\left(\frac{x}{a_{nj}}\right)$ ir yra at.d. X_j skirstinio tankis tik ne taške x, o taške x/a_{nj}. Iš to seka, kad

$$\sup_x p_{\xi_j^{(n)}}(x) = \frac{1}{a_{nj}}\sup_x p_{X_j}\left(\frac{x}{a_{nj}}\right) \le \frac{C_j}{a_{nj}}.$$

■

Remdamiesi 2 tvirtinimu, kai $Z_n = \tilde{Z}_n$ ir, pareikalavę, kad būtų įvykdyta sąlyga$(\tilde{\mathbf{B}}_\gamma)$, rasime tikimybės $\mathbf{P}(\tilde{Z}_n \ge x) = 1 - F_{\tilde{Z}_n}(x)$ asimptotinio skleidinio liekamojo nario

$$R_{n,\gamma} = \int_{\tilde{T}_{n,\gamma}}^{T_n} |f_{n,\gamma}(t)|\frac{dt}{t}$$

įverčius, kai $\gamma = 0$ (Kramerio zonoje) ir, kai $\gamma > 0$ (laipsninėse Liniko zonose). Čia

$$\tilde{T}_{n,\gamma} = (3/8)(1 - x/\tilde{\Delta}_{n,\gamma})\tilde{\Delta}_{n,\gamma}, \qquad \tilde{\Delta}_{n,\gamma} = \Delta_{n,\gamma} = c_\gamma \Delta_n^{1/(1+2\gamma)},$$
$$c_\gamma = (1/6)(\sqrt{2}/6)^{1/(1+2\gamma)}, \qquad \Delta_n = \tilde{\Delta}_n,$$

$\tilde{\Delta}_n$ apibrėžtas lygybe (5.32).

T E O R E M A 13. *Tegul nepriklausomi, nevienodai pasiskirstę at.d.* X_j, *su vidurkiu* $\mathbf{E}X_j = 0$ *ir dispersija* $\sigma_j^2 = \mathbf{E}X_j^2 > 0$ *tenkina sąlygas* $(\tilde{B}_\gamma)$ *ir* $(\tilde{D})$, *tuomet at.d.* $Z_n = \tilde{Z}_n$ *galioja asimptotiniai skleidiniai* (3.21) *ir* (4.11) *su liekamojo nario įverčiais* (3.27) *ir* (3.28) *bei* (4.17) *ir* (4.18) *su*

$$C_j^{(n)} = \tilde{C}_j^{(n)} = \frac{C_j}{a_{nj}}, \qquad \Delta_n = \tilde{\Delta}_n = \frac{\tilde{B}_n}{\tilde{K}_n},$$
$$K_n = \tilde{K}_n = \max_{1 \le j \le n} (2a_{nj}\{K \vee \sigma\}).$$

Pagrindiniai rezultatai ir išvados

- **Gautas nepriklausomų, nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių normuotos sumos serijų schemoje, skirstinio asimptotinis skleidinys su optimaliu liekamojo nario įverčiu didžiųjų nuokrypių Kramerio ir laipsninėse Liniko zonose, kai atskiri dėmenys tenkina apibendrintą S.N. Bernšteino sąlygą**.

- **Gautas nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių normuotos sumos serijų schemoje skirstinio tankio funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių zonose**.

- **Rezultatai gauti panaudojus kumuliantų ir charakteristinių funkcijų metodus**.

- **Įrodytos diskontavimo didžiųjų nuokrypių teoremos (be asimptotinio skleidinio) ir eksponentinės nelygybės. Šie rezultatai gauti kumuliantų metodu**.

Literatūra

KITŲ AUTORIŲ DARBAI

[1] Amosova N.N. Necessity of Statulevičius' condition in limit theorems for large - deviation probabilities, Lithuanian Math. J. **39**, 1999, p. 231-239.

[2] Bentkus R. and Rudzkis R. The large deviations for estimates of spectrum of the Gaussian stacionary time series, Lithuanian Math. J., **16**, 1979, p.63-77.

[3] Bentkus R. and Rudzkis R. On exponential estimates of the distribution of random variables, Lithuanian Math. J., **20**, 1980, p.15-30.

[4] Bikelis A. and Žemaitis A. Asymptotic expansions for probability of large deviations II, Lithuanian Math. J., **14**, 1974, p.567-572.

[5] Bikelis A. and Žemaitis A. Asymptotic expansions for the probabilities of large deviations. Normal approximation III, Lithuanian Math. J., **16**, 1976, p.332-348.

[6] Borovkov A.A. New limit theorems in boundary problems for sums of independent random variables, Sib. Math. J., **3**, 1962, p.645-694.

[7] Borovkov A.A. Investigation on large deviations in boundary problems with arbitrary boundaries I, II, Sib. Math. J., **2**, p.253-289, **4**, 1964, p.750-767.

[8] Borovkov A.A. and Rogozin B.A. On the multi - dimensional central limit theorem, Theory Probab. Appl., **10**, 1965, p.55-62.

[9] Borovkov A.A. Boundary problems invariance principle and large deviations, Usp. Math. Nauk, **38**, 1983, p.227-254.

[10] Borovkov A.A., Mogulskij A.A. Integro - lokalnije predelnije teoremy dlia sum sluchajnyh vektorov, vkluchajuchije bolshije uklonenija, I, II, Teorija verojatnostej i jejo primenenija T.**43**, 1998, T.**45**, 2000.

[11] Chernoff H. Large sample theory: parametric case, Ann. Math. Stat., **27**, 1956, p.1-22.

[12] Chintshine A. Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Annalen., **101**, 1929, p.745-752.

[13] Cramer H. Sur un nouvean theoreme - limite de lar theorie des probabilities, Actual. Sci. et. ind. III, **736**, 1938, Paris, p.5-23.

[14] Kramer G. Ob odnoj predelnoj teoreme teorii verojatnostej. Uspehi matem. nauk, T.**X**, 1944, p. 166-178.

[15] Daniels H. Saiddlepoint approximations in statistics, Ann. Math. Stat., **25**, 1954, p.631-650.

[16] Dobrushin R.L. Central limit theorem for non - stacionary Markov chains I, II, Theory Probab. Appl., **1**, 1956, p.365-425.

[17] Feller W. Generalization of a probability theorem of Cramer, Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 1943, p.361-372.

[18] Feller W. Limit theorems for probabilities of large deviations, Z.Wahr. Verw. Geb., **14**, 1969, p.1- 20.

[19] Gerber H.I. The discounted central limit theorem and its Berry - Esseen analogue, The Annals of Mathematical Statistics, **42**, 1971, p.389-392.

[20] Ibragimov I.A. and Linnik Yu.V. Independent and Stacionary Sequences of Random Variables Nauka, Moscow. English Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.

[21] Jakševičius Š. Asymptotic expansions for probability distributions I-IV, Lithuanian Math. J., **23**, p.73-83, **23**, p.196-213, **24**, p.216-223, **25**, p.194-208, 1983-1985.

[22] Khintchine A. Uber die positiven und negativen Abweichungendes arithmetischen Mittels, Math. Annalen **101**, 1929, p.381-385.

[23] Leonov V.P. and Shiryaev A.N. On a method of calculating semi - invariants, Theory Probab. Appl., **4**, 1959, p.319-329.

[24] Linnik Yu.V. On the probability of large deviatuons for the sums of independent variables, Proceedings of the IV - th, Berkeley Symposium, 1960.

[25] Linnik Yu.V. The new limit theorems for sums of independent random variables, Sov. Math. Dokl., **133**, 1960, p.1291-1293.

[26] Linnik Yu.V. Limit theorems for sums of independent variables taking into account large deviations I-III, Theory Probab. Appl. **6**, p.131-148, **6**, p.345-360, **7**, 1961, 1962, p.115-120.

[27] Mogulskij A.A. Verojatnosti bolshih uklonenij dlia sluchajnyh bluzdanij, Preprint Instituta matematiki SOAH SSSR, Novosibirsk, 1980, p. 3-46.

[28] Mogulskij A.A. Metod Furje dlia nahozdenije malyh uklonenij vinerskobo procesa, Sibirskij matem. zurnal, T.**XXIII**, 1982, p. 161-174.

[29] Nagajev A.V. Local limit theorems with respect of large deviations, Limit theorems and random processes, Tashkent, 1967, p.71-88.

[30] Nagajev A.V. Integral limit theorems taking into account large deviations when Cramer's condition does not hold I, II, Theory Probab. Appl., **14**, 1969, p.51-63.

[31] Nagajev S.V. Some limit theorems for large deviations, Theory Probab. Appl., **10**, 1965, p.214-235.

[32] Nagajev S.V. and Fuk D.Kh. Probability inequalities for the sums of independent random variables, Theory Probab. Appl., **16**, 1971, p.643-650.

[33] Nagajev S.V. Large deviations for sums of independent random variables, Trans. Sixth Prague Conference Information Theory, Random Processes and Statistical Decision Function, Academia Prague, 1973, p.657-674.

[34] Nagajev S.V. and Sakoyan S.D. On an estimate for the probability of large deviations, Limit Theorems and Mathematical Statistics, Fan, Tashkent, 1976, p.132-140.

[35] Nagajev S.V. Large deviations of independent random variables, Ann. Probab., **7**, 1979, p.745-789.

[36] Osipov L.V. On large deviation probabilities for sums of independent random vectors, Theory Probab. Appl., **23**, 1977, p.490-505.

[37] Osipov L.V. On large deviation probabilities for sums of independent random vectors, Theory Probab. Appl., **23**, 1978, p.490-505.

[38] Osipov L.V. Probabilities of large deviations in certain classes of sets for sums of independent random vectors, Math. Zametki, **32**, 1984, p.147-153.

[39] Petrov V.V. An extension of Cramer's limit theorem for independent nonidentically distributed random variables, Vestnik Leningrad Univ., **8**, 1953, p.13-25.

[40] Petrov V.V. A generalization of Cramer's limit theorem, Uspekhi Math. Nauk, **9**, 1954, p.195-202.

[41] Petrov V.V. Limit theorem for large deviations violating Cramer's condition I, Vestnik Leningrad Univ., **19**, 1963, p.49-68.

[42] Petrov V.V. Limit theorem for large deviations violating Cramer's condition II, Vestnik Leningrad Univ., **1**, 1964, p.58-75.

[43] Petrov V.V. The asymptotic behaviour of large deviation probabilities, Theory Probab. Appl., **13**, 1989, p.432-444.

[44] Petrov V.V. Sums of independent random variables, Nauka, Moskva, 1972.

[45] Pipiras V. and Statulevicius V. Asymptotic expansions for sums of independent random variables, Lithuanian Math. J., **8**, 1968, p.137-151.

[46] Plikusas A. Estimation of cumulants and large deviations for certain nonlinear transformations of a stacionary Gaussian process, Lithuanian Math. J., **20**, 1980, p.119-128.

[47] Plikusas A. Some properties of the multiple Ito integral, Lithuanian Math. J., **21**, 1981, p.163-173.

[48] Prokhorov Yu.V. Multidimensional distribution inequalities and limit theorems, Probab. Theory and Math. Statist., **10**, 1972, p.5-24.

[49] Prochorov Yu.V. and Statulevičius V. Limit Theorems of Probability Theory, Springer - Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000.

[50] Richter W. Local limit theorem for large deviation, Sov. Math. Dokl., **115**, 1957, p.53-56.

[51] Rozovsky L.V. An Asymptotic Behavior of the Remainder in the Central Limit Theorem for Moments of Sums of Independent Random Variables, Acta Applicandae Mathematicae **58**, Kluwer Academic Publishers, 1999, p.265-278.

[52] Rudzkis R. On the lemma of V.Statulevičius, Lithuanian Math. J., **17**, 1977, p.179-185.

[53] Rudzkis R., Saulis L., Statulevičius V. A general lemma of large deviations, Lithuanian Math. J., **18**, 1978, p.99-116.

[54] Rudzkis R., Saulis L., Statulevičius V. Large deviations of sums of independent random variables, Lithuanian Math. J., **19**, 1979, p.169-179.

[55] Rudzkis R. Probabilities of large excursions of nearly Gaussian stochastic processes, Lithuanian Math. J., **29**, 1989, p.785-805.

[56] Sakhanenko A.I. Convergence rate in invariance principle for nonidentically distributed variables with exponentical moments, Tr. Inst. Math. Sib. Branch Acad. Sci. USSR, **3**, 1984, p.3-49.

[57] Saulis L. On the asymptotic expansions for the probabilities of large deviations, Lithuanian Math. J., **9**, 1969, p.605-625.

[58] Saulis L. Limit theorems on the large deviations under Yu.V.Linnik's condition fails, Lithuanian Math. J., **13**, 1973, p.173-196.

[59] Saulis L. Asymptotic expansions in large deviation zones for the distribution density of sums of independent random variables, New Trends in Probab. and Statist., 1991, p.43-56.

[60] Saulis L. and Statulevičius V.A. Limit Theorems for Large Deviations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1991.

[61] Saulis L. Asymptotic expansion of the distribution function of a random variables with regular behaviour of cumulants, Lithuanian Math. J., **36**, 1996, p.365-392.

[62] Saulis L. Asymptotic Expansions of Large Deviations for Sums of Nonidentically Distributed Random Variables, Acta Applicandae Mathematicae **58**, Kluwer Academic Publishers, 1999, p.291-310.

[63] Saulis L. and Statulevičius. Limit Theorems of large deviations, in: Limit Theorems of Probability Theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000, p. 185-266.

[64] Smirnov N.V. On the probability in large deviations, Math. J., **40**, 1933, p.443-454.

[65] Statulevičius V. Limit theorems for the density functions and asymptotic expansions for distributions of sums of independent random variables, Theory Probab. Appl., **10**, 1965, p.645-659.

[66] Statulevičius V. On large deviations, Z. Wahr. Verw. Geb., **6**, 1966, p.133-144.

[67] Statulevičius V. Limit theorems of large deviations for sums of dependent random variables I, Lithuanian Math. J., **19**, 1979, p.199-208.

[68] Wold H. A study in the analysis of stacionary time series, Uppsala, 1938.

[69] Volkenshtein M.B. Konfiguracionaja statistika polimernyh cepej, Moskva, 1959.

[70] Zolotarev V.M. On a new view point to limit theorems admitting large deviations, Proceedings of the Sixth All - Union Conference on Probab. Theory and Math. Statist., Vilnius, 1962, p.43-48.

AUTORĖS STRAIPSNIAI

[71] Deltuvienė D., Saulis L. Asymptotic Expansions of the Distribution Density in the Large Deviations Zones for Sums of Independent Random Variables in the Series Scheme, Acta Applicandae Mathematicae **78**, Dortrecht, Kluwer Academic Publishers B.V., 2003, p.87-97.

[72] Deltuvienė D., Saulis L. Asymptotic expansions in the large deviation zones for the distribution function of sums of random variables in the series scheme, Lithuanian Math. J., **43**, Vilnius, MII, 2003, p. 682-686.

[73] Saulis L., Deltuvienė D. The discounted limit theorems for large deviations, Lithuanian Math. J., **43**, Vilnius, MII, 2003, p. 703-708.

[74] Deltuvienė D. Asymptotic expansion for the distribution function of the series scheme of random variables in the large deviation Cramer zone, Lithuanian Math. J., **42**, Vilnius, MII, 2002, p. 691-696.

[75] Deltuvienė D., Saulis L. Atsitiktinių dydžių sumos serijų schemoje tankio funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių Kramerio zonoje, Lietuvos matematikos rinkinys, **41**, Vilnius, MII, 2001, p. 620-625.