

Modifikuota neutralaus tipo logistinė diferencialinė lygtis su vėlavimu

Donatas ŠVITRA (KU)

el. paštas: ingrida.sirvydaite@ktl.lt

Nagrinėjama diferencialinė lygtis

$$N(t) = rN \left[1 + a \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) - \frac{N(t-h) + \rho N(t-h)}{K} \right]. \quad (1)$$

Bifurkacijų teorijos pagalba sukonstruotas atsirandantis iš pusiausvyros būsenos $N(t) \equiv K$ periodinis (1) sprendinys.

1. Lygtis (1) prie $a = 0$ buvo įvesta ir tiriama darbuose [1–4]. Juose gautos sprendinių aprėžtumo, asimptotinio stabilumo ir periodinio sprendinio egzistavimo sąlygos. Prie $a \neq 0$ turime neutralaus tipo logistinę diferencialinę lygtį su vėlavimu ir vidiniu grįžtamuoju ryšiu (žr. [5]). Visi lygties (1) parametrai yra neneigiami.

2. Lygtis (1) turi pusiausvyros būsenas $N(t) \equiv 0$ ir $N(t) \equiv K$. Akivaizdu, kad nulinė pusiausvyros būseną nestabili. Po pakeitimo $N(t) = K[1 + x(t)]$ iš (1) gausime lygtį

$$\dot{x} + r(1+x)[rax + x(t-h) + \rho x(t-h)] = 0, \quad (2)$$

kurios charakteringas kvazipolinomas yra funkcija

$$P(\lambda) = \lambda [1 + r\rho \exp(-\lambda h)] + ra + r \exp(-\lambda h). \quad (3)$$

Tegul $a = 0$. Tada [4] kvazipolinomas (2) prie fiksuotų ρ ir h turi porą paprastų grynai menamų šaknų $\pm i\sigma_0$, o kitos jo šaknys – neigiamas realias dalis, jei $r = r_0$, kur

$$r_0 = \sigma_0 \sin \sigma_0 h,$$

o σ_0 – vienintelė lygties

$$\operatorname{ctg} \sigma h = -\sigma \rho \quad (4)$$

šaknis, priklausanti intervalui $(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h})$.

Lygybės $r = r_0 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \ll 1$) pagalba įveskime mažą parametą ε . Tada charakteringas kvazipolinomas

$$P(\lambda; \varepsilon) = \lambda [1 + (r_0 + \varepsilon)\rho \exp(-\lambda h) + (r_0 + \varepsilon) \exp(-\lambda h)] \quad (5)$$

turės paprastas šaknis $\tau(\varepsilon) \pm i\rho(\varepsilon)$, kurios tenkina sąlygas $\tau(0) = 0$, $\sigma(0) = \sigma_0$, o visos likusios šaknys turės neigiamas realias dalis.

Nesunku parodyti [4], kad

$$\tau'_0 = -\frac{\operatorname{Re} P'_{0\varepsilon} \times \operatorname{Re} P'_{0\lambda} - \operatorname{Im} P'_{0\varepsilon} \times \operatorname{Im} P'_{0\lambda}}{|P'_{0\lambda}|^2}, \quad (6)$$

$$\sigma'_0 = -\frac{\operatorname{Re} P'_{0\varepsilon} \times \operatorname{Im} P'_{0\lambda} - \operatorname{Im} P'_{0\varepsilon} \times \operatorname{Re} P'_{0\lambda}}{|P'_{0\lambda}|^2}, \quad (7)$$

kur $P'_{0\lambda} = P'_\lambda(\lambda; \varepsilon)$, $P'_{0\varepsilon} = P'_\varepsilon(\lambda; \varepsilon)$, kai $\varepsilon = 0$, $\lambda = i\sigma_0$,

$$|P'_{0\lambda}|^2 = (\operatorname{Re} P'_{0\lambda})^2 + (\operatorname{Im} P'_{0\lambda})^2, \quad \tau'_0 = \frac{d}{d\varepsilon}\tau(\varepsilon), \quad \sigma'_0 = \frac{d}{d\varepsilon}\sigma(\varepsilon), \quad \text{kai } \varepsilon = 0.$$

Mūsų atveju

$$\operatorname{Re} P'_{0\lambda} = \frac{r_0^2}{\sigma_0^2}, \quad \operatorname{Im} P'_{0\lambda} = \sigma_0 h - \frac{r_0^2 \rho}{\sigma_0^2}, \quad \operatorname{Re} P'_{0\varepsilon} = 0, \quad \operatorname{Im} P'_{0\varepsilon} = -\frac{\sigma_0}{r_0}, \quad (8)$$

ir galioja nelygybės $\tau'_0 > 0$, $\sigma'_0 > 0$.

Darbuose [4–6] išvystyta bifurkacijų teorija įvairioms diferencialinių lygčių su vėlavimu klasėms. Šią teoriją pritaikėme ir dabar.

1 teorema [4]. *Tegul $r = r_0 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \ll 1$), $a = 0$. Diferencialinė lygtis (1) pusiausvyros būsenos $N(t) \equiv K$ aplinkoje turės vienintelį stabilų periodinį sprendinį*

$$N(t) = K (1 + \xi \cos \sigma_0 t + \xi^2 x_2(\tau) + O(\xi^3)). \quad (9)$$

Asimptotinėje išraiškoje (9)

$$x_2(\tau) = A_{2s} \sin 2\sigma_0 \tau + A_{2c} \cos 2\sigma_0 \tau, \\ A_{2s} = \frac{-\frac{1}{2}\sigma_0 \operatorname{Re} P_0(2i\sigma_0)}{|P_0(2i\sigma_0)|^2}, \quad A_{2c} = \frac{-\frac{1}{2}\sigma_0 \operatorname{Im} P_0(2i\sigma_0)}{|P_0(2i\sigma_0)|^2},$$

$P_0(2i\sigma_0) = P(\lambda; \varepsilon)$, kai $\varepsilon = 0$, $\lambda = 2i\sigma_0$ ir $|P_0(2i\sigma_0)|^2 = [\operatorname{Re} P_0(2i\sigma_0)]^2 + [\operatorname{Im} P_0(2i\sigma_0)]^2$.

Nesunku parodyti, kad

$$\operatorname{Re} P_0(2i\sigma_0) = -r_0(1 + 2r_0^2 \rho^2), \quad \operatorname{Im} P_0(2i\sigma_0) = 2\sigma_0(1 + r_0^3 \rho^3).$$

Be to, $\xi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}$, $\tau = \frac{t}{1+c_2\xi^2}$, kur

$$c_2 = \frac{A_{2s}/2}{\operatorname{Im} P_{0\lambda}}, \quad b_2 = \frac{1}{4}r_0 \left(1 - 2A_{2c} - 2A_{2s} \frac{\operatorname{Re} P'_{0\lambda}}{\operatorname{Im} P'_{0\lambda}} \right) \quad (10)$$

yra teigiami dydžiai.

3. Tegul $ra = a_0\varepsilon$. Tada kvazipolinomas (3) prie $r = r_0 + \varepsilon$ turi paprastas šaknis $\eta(\varepsilon) \pm iw(\varepsilon)$, tenkinančias sąlygas $\eta(0) = 0$, $w(0) = \sigma_0$ ir

$$\eta'_0 = \tau'_0 - a_0 \frac{\operatorname{Re} P'_{0\lambda}}{|P'_{0\lambda}|^2}, \quad w'_0 = \sigma'_0 + a_0 \frac{\operatorname{Im} P'_{0\lambda}}{|P'_{0\lambda}|^2}, \quad (11)$$

kur τ'_0 ir σ'_0 nustatomi formulių (6) ir (7) pagalba.

2 teorema. Tegul $\eta'_0 > 0$, $r = r_0 + \varepsilon$, $ra = a_0\varepsilon$ ($|\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \ll 1$). Tada pusiausvyros būsenos $N(t) \equiv K$ aplinkoje diferencialinė lygtis (1) turės vienintelį stabilų periodinį sprendinį $N(t)$, kuriam galioja asimptotinės išraiškos (9), kur

$$\xi = \sqrt{-\frac{\eta'_0\varepsilon}{d_0}}, \quad \tau \left[1 - \left(\frac{\eta'_0 c_0}{d_0} + \frac{w'_0}{\sigma_0} \right) \varepsilon \right] = t, \quad (12)$$

dydžiai η'_0 ir w'_0 apibrėžiami formulėmis (11),

$$d_0 = -\tau'_0 b_2, \quad c_0 = c_2 + \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} b_2. \quad (13)$$

Literatūra

- [1] K. Gopalsamy, B. Zhang, On neutral delay logistic equation, *Dynamics and Stability System*, **2**, 183–195 (1988).
- [2] H. Freedom, Y. Kuang, Stability switches in linear scalar neutral delay equations, *Funkcialaj ekvacioj*, **3**(4) (1991).
- [3] Y. Kung, A. Feldstein, Boundedness of solutions of a nonlinear nonautonomous neutral delay equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **156** (1996).
- [4] Д.И. Швитра, Логистическое дифференциальное уравнение с запаздыванием нейтрального типа, *Liet. Matem. Rink.*, **37**(2), 224–232 (1997).
- [5] Д.И. Швитра, *Динамика физиологических систем*, Мокслас, Вильнюс (1989).
- [6] Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра, *Автоколебания в системах с запаздыванием*, Мокслас, Вильнюс (1979).

Modified logistic differential equation of neutral type with time delay

D. Švitra

The following differential equation is considered:

$$N(t) = rN \left[1 + a \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) - \frac{N(t-h) + \rho N(t-h)}{K} \right].$$

The stable periodic solution based on the bifurcation theory of that differential equation is constructed.