Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 191–195

Apie pirmos eilės diferencialinių lygčių neaprėžtus sprendinius

Gintautas GUDYNAS (KU)
el. paštas: ggintaut@gmf.ku.lt

Diferencialinių lygčių teorijoje apibrėžiant pradinių arba kraštinių uždavinių sprendinius t.t. formulėmis plačiai yra naudojami taip vadinami fundamentalūs arba ypatingi sprendiniai. Straipsnyje [1] Koši uždavinio

$$\begin{aligned} &u_t + F(t,x,u,u_x) = 0,\\ &u(0,x) = \varphi(x), \end{aligned} \tag{1}$$

sprendiniai buvo užduoti formule

$$u(t,x) = \inf_{\xi\in R^n} \left[\varphi(\xi) + \Phi(t,x,\xi)\right].$$

Funkciją $\Phi(t,x,\xi)$ galime apibrėžti taip: tegul $u^c(t,x,\xi)$ yra (1) lygties sprendiniai, tenkinantys pradinę sąlygą

$$u(0,x) = c|x-\xi|,$$

tuomet

$$\Phi(t,x,\xi) = \lim_{c\to+\infty} u^c(t,x,\xi).$$

Pastebėsime, kad ši funkcija tenkina tokią pradinę sąlygą

$$\Phi(0,x,\xi) = \begin{cases} 0, & x=\xi,\\ +\infty, & x\neq\xi. \end{cases}$$

Šiame darbe panašus algoritmas naudojamas apibrėžiant diferencialinės lygties

$$y' + H(x,y) = 0, \tag{2}$$

bendrąjį sprendinį. Pradžioje yra apibrėžiami sprendiniai $G(x,\xi)$ tenkinantys pradinę sąlygą.

$$G(\xi,\xi) = +\infty. \tag{3}$$

Juos galime užduoti tokiu būdu: tegul $y^c(x,\xi)$ (2) lygties sprendinys su pradine sąlyga

$$y(\xi) = c,$$

tuomet

$$G(x,\xi) = \lim_{c\to+\infty} y^c(x,\xi).$$

Straipsnyje suformuluotos sąlygos, kuomet funkcija $G(x,\xi)$ yra baigtinė ir užduoda bendrąjį (2) lygties sprendinį.

Tokio tipo konstrukcijos netinka tiesinėms lygtims. Pavyzdžiui, nagrinėjant tiesinę (2) lygtį galime parodyti, kad $G(x,\xi) = +\infty$, kai $(x,\xi) \in R^2$.

Tegul funkcijos $H(x,y)$, $H_y(x,y)$ yra tolydžios erdvėje R^2. Tarkime egzistuoja tokie $y_0 \in R$, kad

$$H(x,y) \succ 0, \tag{4}$$

o integralas

$$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{H(x,y)}, \tag{5}$$

tolygiai konverguoja $+\infty$ aplinkoje, kai $y \geqslant y_0$, o x priklauso aprėžtoms aibėms iš R. Prie šių sąlygų yra teisinga teorema.

Teorema. *Funkcija $G(x,\xi)$ yra* (2) *lygties vienintelis sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą* (3)*. Jeigu funkcija $H(x,y)$ tenkina sąlygą*

$$H(x,y) \geqslant \alpha_1|y|^{1+\alpha} + \alpha_2, \tag{6}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \succ 0$, *visiems $(x,y) \in R^2$, tuomet funkcija $G(x,\xi)$ yra* (2) *lygties bendrasis sprendinys.*

Įrodymas. Fiksuojame $\xi \in R$. Remiantis egzistavimo ir vienaties teorema, sprendiniai y^c egzistuoja ir $y^{c_1} \succ y^{c_2}$, kai $c_1 \succ c_2$. Parodysime, kad jie yra tolygiai pagal c aprėžti intervale $(\xi, \xi+\varepsilon]$. Skaičių $\varepsilon \succ 0$ parinksime tokį, kad šiame intervale $y^{c_0}(x,\xi) \geqslant y_0$ kokiam nors c_0. Toksai skaičius c_0 egzistuoja, nes $y^{c_0}(\xi,\xi) = c_0$, taigi galime jį paimti pakankamai didelį ir toliau pasinaudoti funkcijos $y^{c_0}(x,\xi)$ tolydumu. Tegul $c \geqslant c_0$ ir $x \in (\xi, \xi+\varepsilon]$. Remiantis (2),(4)

$$\frac{y^{c\prime}(x,\xi)}{H\big(x, y^c(x,\xi)\big)} + 1 = 0$$

arba

$$\int_{\xi}^{x} \frac{y^{c\prime}(t,\xi)}{H\big(t, y^c(t,\xi)\big)}\,\mathrm{d}t + x - \xi = 0.$$

Atlikę pakeitimą $s = y^c(t,\xi)$, $t = (y^c)^{-1}(s)$ po integralo ženklu (iš lygties (2) ir sąlygos (4) turėsime funkcijos $y^c(t,\xi)$ monotoniškumą intervale $(\xi, \xi+\varepsilon]$), gausime

$$\int_{c}^{y^c(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}s}{H\big((y^c)^{-1}(s), s\big)} + x - \xi = 0,$$

arba

$$\int_{y^c(x,\xi)}^{c} \frac{\mathrm{d}s}{H\big((y^c)^{-1}(s), s\big)} = x - \xi \succ 0. \tag{7}$$

Fiksuosime $x \in (\xi, \xi+\varepsilon]$. Tegul $x - \xi = \varepsilon_0$. Kadangi $(y^c)^{-1}(s) \in [\xi, x]$, kai $s \in [y^c(x,\xi), c]$, tai remiantis (5) galime teigti, jog egzistuoja $C \geqslant y_0$, kad

$$\left| \int_{y^c(x,\xi)}^{c} \frac{\mathrm{d}s}{H\big((y^c)^{-1}(s), s\big)} \right| \prec \varepsilon_0,$$

kai $y^c(x,\xi), c \geqslant C$. Pasinaudoję (7) gauname, kad $y^c(x,\xi) \prec C$, kai $c \geqslant C$.

Taigi ribinė funkcija $G(x,\xi)$ intervale $(\xi, \xi+\varepsilon]$ yra baigtinė ir monotoniškai mažėjanti. Parodysime, kad ši funkcija tenkina (2) lygtį. Tegul $x_0, x_0+h \in (\xi, \xi+\varepsilon]$. Pasinaudodami funkcijos $H\ (x,y)$ tolydumu ir (2) lygtimi, o taip pat funkcijų $y^c(x,\xi)$ aprėžtumu, kai $x \in [\xi+\delta, \xi+\varepsilon]$, gausime, kad egzistuoja konstanta $M \succ 0$, nepriklausanti nuo c, tokia, kad

$$|y^c(x_0+h,\xi) - y^c(x_0,\xi)| = \int_{x_0}^{x_0+h} H\big(x, y^c(x,\xi)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant Mh.$$

Perėjus prie ribos, kai $c \to +\infty$, gauname funkcijos $G(x,\xi)$ tolydumą pagal x. Toliau, pasinaudoję Dini teorema, galime teigti, kad monotoniškai didėjanti funkcijų seka $\{y^c(x,\xi)\}$ tolygiai intervale $[\xi+\delta, \xi+\varepsilon]$ konverguoja prie funkcijos $G(x,\xi)$, kai $c \to +\infty$. Taigi galime pereiti prie ribos, kai kai $c \to +\infty$, lygybėje

$$y^c(x,\xi) - y^c(x_0,\xi) = -\int_{x_0}^{x} H\big(x, y^c(x,\xi)\big)\,\mathrm{d}x$$

po integralo ženklu, kai $x_0, x \in [\xi+\delta, \xi+\varepsilon]$, bet kokiam $\delta \in (0, \varepsilon)$. Gausime

$$G(x,\xi) - G(x_0,\xi) = -\int\limits_{x_0}^{x} H\big(x, G(x,\xi)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Taigi funkcija $G(x,\xi)$ tenkina (2) lygtį, o remiantis funkcijos $G(x,\xi)$ apibrėžimu gausime sąlygą (3).

Parodysime, kad taip apibrėžta funkcija $G(x,\xi)$ yra vienintelė. Tarkime $G^*(x,\xi)$ yra kitas (2), (3) uždavinio sprendinys. Fiksuokime intervalą $(\xi, \xi+\varepsilon)$, kuriame abu sprendiniai yra apibrėžti ir paimkime $x_0 \in (\xi, \xi+\varepsilon)$. Iš egzistavimo ir vienaties teoremos seka, kad $G^*(x_0,\xi) \succ y^c(x_0,\xi)$ bet kokiam $c \in R$, vadinasi $G^*(x_0,\xi) \succ G(x_0,\xi)$. Kad įrodytume priešingą nelygybę, paimkime $G^*(x+\delta,\xi)$, $\delta \succ 0$, $x+\delta \in (\xi, \xi+\varepsilon)$. Akivaizdu, kad $y^c(x,\xi) \succ G^*(x+\delta,\xi)$, kai $c \succ G^*(\xi+\delta,\xi)$, taigi ir $G(x_0,\xi) \succ G^*(x_0+\delta,\xi)$. Pasinaudoję funkcijos $G(x,\xi)$ tolydumu pagal x ir perėję prie ribos, kai $\delta \to 0$, gauname $G(x_0,\xi) \succ G^*(x_0,\xi)$ arba $G(x_0,\xi) = G^*(x_0,\xi)$.

Dabar įrodysime, kad funkcija $G(x,\xi)$ yra (2) lygties bendrasis sprendinys. Remiantis (6)

$$0 = G_x(x,\xi) + H\big(x, G(x,\xi)\big) \geqslant G_x(x,\xi) + \alpha_1 |G(x,\xi)|^{1+\alpha} + \alpha_2,$$

arba

$$G_x(x,\xi) + \alpha_1 |G(x,\xi)|^{1+\alpha} + \alpha_2 \leqslant 0.$$

Atlikę elementarius pertvarkymus turėsime

$$\int\limits_{\xi+\delta}^{x} \frac{G_x(x,\xi)\,\mathrm{d}x}{\alpha_1|G(x,\xi)|^{1+\alpha} + \alpha_2} + x - \xi - \delta \leqslant 0,$$

$$\int\limits_{G(\xi+\delta,\xi)}^{G(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}G}{\alpha_1\,|G|^{1+\alpha} + \alpha_2} + x - \xi - \delta \leqslant 0,$$

kai $\xi+\delta, x$ priklauso funkcijos $G(x,\xi)$ apibrėžimo sričiai ir $\xi+\delta \prec x$, $\delta \succ 0$. Iš pastarosios nelygybės turėsime, kad funkcija $G(x,\xi)$ yra pratesiama tiktai baigtiniame intervale (ξ, x^*), t.y. $\lim_{x\to x^*-0} G(x,\xi) = -\infty$ ir $x^* \prec +\infty$.

Tegul $y(x)$ yra (2) lygties sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$. Parodysime, kad egzistuoja toks $\xi_0 \in R$, kuriam $y(x) = G(x,\xi_0)$. Galimi du atvejai: arba sprendinys $y(x)$ pratesiamas į kairę nuo taško x_0 tiktai baigtiniame intervale (x_*, x_0), $x_* \succ -\infty$, arba tas intervalas yra begalinis. Pirmuoju atveju iš (6) turėsime $\lim_{x\to x_*+0} y(x) = +\infty$, o tai reiškia, jeigu pasinaudosime sprendinio $G(x,\xi)$ vienatimi, kad $y(x) = G(x, x_*)$. Antruoju atveju sprendinys $y(x)$ turi turėti bendrą tašką su kokiu nors sprendiniu $G(x,\xi)$, t.y. jis turi sutapti su juo. Tai prieštarauja įrodytai sprendinių $G(x,\xi)$ savybei, kad jie yra pratesiami tiktai baigtiniame intervale.

Teorema įrodyta.

Pavyzdys. Teorema gali būti pritaikyta Rikati lygčiai

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0.$$

Jeigu funkcijos $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ yra tolydžios funkcijos ir $a(x) \geqslant a_0 \succ 0$, tai bet kokiam $\xi \in R$ egzistuoja šios lygties sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą (3). Lygčiai

$$y' + y^2 - 1 = 0 \tag{8}$$

nėra išpildyta (6) sąlyga. Šiuo atveju, kaip nesunku matyti, funkcijų šeima

$$G(x,\xi) = \frac{1 + e^{-2(x-\xi)}}{1 - e^{-2(x-\xi)}}$$

nėra (8) lygties bendrasis sprendinys, nes ją sudarančių funkcijų grafikai negali kirsti pusiausvyros taško $y \equiv 1$, o tai reiškia, kad jie negali eiti per taškus (x_0, y_0), kuriems $y_0 \leqslant 1$.

Literatūra

[1] G. Gudynas, Generalized solutions of non-linear equations of first order with the bounded and lower semi-continous intial function, *Preprint*, Vilnius (in Russian) (1990).

On unbounded solutions of the first order ordinary differential equations

G. Gudynas

The article is concerned with Cauchy problem

$$G_x(x,\xi) + H\big(x, G(x,\xi)\big) = 0,$$
$$G(\xi,\xi) = +\infty.$$

Let $H(x,y)$, $H_y(x,y) \in C(R^2)$ and

$$H(x,y) \succ \alpha_1 |y|^{1+\alpha} + \alpha_2,$$

where $\alpha_1, \alpha_2 \succ 0$. Then there exists the unique solution $G(x,\xi)$ of Cauchy problem and it is general solution of this equation.